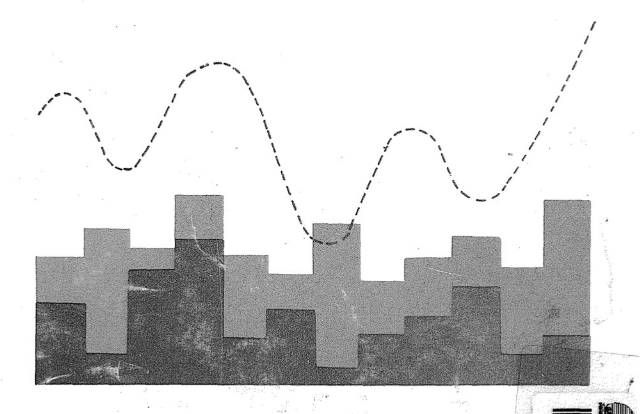
الرياضيات والإحصاء لدراسات المحاسبة والأعمال



جوردن بانكروفت
چورچ أوسليفان

دار ماكجروهيل للنشر

الرياضيات والإحصاء

لدراسات المحاسبة والأعمال

تأليف

جوردن بانكروفت
محاضر أول الرياضيات
معهد شمال ستافورد شاير البوليتكنيكى

جورج أوسليفان
محاضر أساسى الإحصاء
معهد مدينة برمنجهام البوليتكنيكى

ترجمة

الدكتور جمال سامى مقدس
أستاذ الإحصاء الرياضى المساعد
قسم الرياضة البحتة - كلية العلوم
جامعة عين شمس - جمهورية مصر العربية

مراجعة

الأستاذ الدكتور السيد محمد الغزى
رئيس قسم الرياضيات - كلية التربية
جامعة عين شمس - جمهورية مصر العربية



دار ماكجروهيل للنشر

نيويورك . سانت لويس . سان فرنسيسكو . أوكلاند . بوجوتا . دوسلدورف . جوهانسبرج . لندن .
مكسيكو . مونتريال . نيودلهى . بنلما . باريس . ساوباولو . سنغافورة . سيدنى . طوكيو . تورنتو

جمهورية مصر العربية — القاهره

Maths and Statistics for Accounting and Business Studies

Gordon Bancroft

George O'Sullivan

ISBN 07 084830 0

المحتويات

صفحه

صفحة

صفحة

المقدمـــة

هذا الكتاب نتاج لسنوات طويلة من تدريس الرياضيات والإحصاء لطلبة السنة الأولى من برامج الدراسات التى تنظمها الهيئات المهنية الكبرى للمحاسبة . ومن الخصائص الهامة للكتاب أنه مبنى على حلول العديد من أسئلة امتحانات تلك الهيئات فى السنوات الماضية . كما أن كثيرا من أسئلة الامتحانات الأخرى معطاه كتمارين للقارىء .

وتتناول الفصول الأولى من الكتاب أسس الرياضيات اللازمة لباقى أجزاء الكتاب ، كما تتناول بالشرح بعض مجالات الرياضيات ذات الأهمية الخاصة لعالم المال والاقتصاد . ولكن الجزء الأكبر من الكتاب يعالج أسس علم الاحصاء وأساليبه مع تطبيقها على مشاكل الاقتصاد والأعمال .

وقد أعد هذا الكتاب أساسا للتحضير لامتحانات الهيئات المهنية للمحاسبة . ولكنه يصلح كذلك لطلبة السنوات الأولى بالكليات التى تمنح درجات علمية فى المحاسبة والأعمال.ويغطى الكتاب كذلك متطلبات الوحدات الدراسية التى وضعها مجلس تعليم الأعمال على المستوى الوطنى العالى بالمجلسين B1 و B2 .

شكر وتقدير

يود المؤلفان أن يعبرا عن عرفانهما للهيئات المهنية التالية لسماحها بتضمين الكتاب أسئلة امتحاناتها فى السنوات السابقة .

معهد محاسبى التكاليف والادارة (م م ت أ)	ICMA
جمعية المحاسبين المعتمدين (جـ م م)	ACCA
معهد ادارة الأفراد (م أ أ)	IPM

وفى الحالات التى تضمنت فيها أمثلة الكتاب وتمارينة مادة مأخوذة من أسئلة تلك الامتحانات فقد أوردنا اسم الهيئة المهنية ومستوى الامتحان وتاريخه فى نهاية السؤال . ولايعنى هذا أن السؤال معطى بالكامل ، أو أنه قد جاء فى الامتحان المذكور بنفس الصورة التى جاء بها فى المثال ، أو التمرين بالضبط . وبالمثل ففى الحالات التى أوردنا فيها نص الكتاب بيانات مأخوذة من أحد اسئلة الامتحانات ذكرنا اسم الهيئة والامتحان المعنى . أما حلول الأسئلة والتعليق عليها فهى من اعدادنا كلية ، ولا صلة بينها ، وبين أية اجابات نموذجية أعدتها تلك الهيئات المهنية ، أو أعدت بالنيابة عنها .

ونود كذلك أن نغتنم هذه الفرصة لنشكر أعضاء هيئة التدريس بمعهد شمال ستافوردشير البوليتكنيكى The North Staffordshire Polytechnic ومعهد مدينة برمنجهام البوليتكنيكى The City of Birmingham Polytechnic لمعاونتهم فى اعداد ، ومراجعة الأصول الخطية للكتاب . وفى الختام نعبر عن شكرنا لزوجتينا آن والينور لمعونتهما وتشجيعهما .

الفصل الأول

تمهيـد

١ - ١ دور الرياضيات والإحصاء فى المال والاقتصاد

من المهام الرئيسية للمحاسب اتخاذ القرارات المبنية على البيانات المتعلقة بالحالة الاقتصادية لشركة ما . ولما كانت البيانات الاقتصادية بطبيعتها بيانات ذات طبيعة كمية ؛ فإن المحاسب يجب أن يلم بأساليب تحليل مثل هذه البيانات العددية . لذلك فمن الضرورى لكل من يعمل فى مجال المال والاقتصاد أن تكون لديه فكرة واضحة عن الرياضيات والاحصاء . والهدف من هذا الكتاب هو إعطاء المعلومات الأساسية فى هذين المجالين للقارىء الذى ينوى أن يشتغل بالاقتصاد والأعمال .

وقد تناولنا فى الفصول (٢ و ٤ و ٥) الأسس الرياضية اللازمة لبقية أجزاء الكتاب . وتتضمن هذه الفصول : الجبر والرسومات البيانية وحساب التفاضل والتكامل ، وهى ذات أهمية للقارىء الذى لم يدرس هذه الموضوعات من قبل وللقارىء الذى درسها منذ زمن بعيد . وفى الفصل الثالث نتناول تطبيقا ماليا هاما للرياضيات ، وهو الحساب المالى . وبهذا الفصل معالجة متكاملة لهذا الموضوع تبدأ بعرض المتواليات الحسابية العددية والهندسية ، ثم تبنى على أساسها أساليب حساب الربح المركب ، والخصم والاستثمار . ولهذا الفصل أهمية بالغة للمحاسب لأنه كثيرا مايحتاج لحساب نتيجة استثمار معين . وسيجد القارىء أن اجراء تلك الحسابات الهامة لايحتاج إلا لقدر محدود من المعلومات الرياضية .

أما باقى الكتاب ـ وهو الجزء الأكبر منه ـ فيتناول أساليب واستخدامات نظريـة الاحتمالات والإحصاء . وهناك علاقة نظرية بين دور المحاسبة ودور الاحصاء . والفرق بينهما أن لدى المحاسب جداول من البيانات المالية بدلا من نتائج المسح الاحصائى ، أو نتائج تجربة علمية . وعادة مايقيس المحاسب بياناته بوحدات نقدية فى حين يقيسها الآخرون بوحدات الطول ، أو بعدد مرات نجاح التجربة ، أو ما أشبه .

وبالرغم من تلك العلاقة الواضحة بين الإحصاء والمحاسبة إلا أن مهنة المحاسبة لم تتقبل استخدام الاحصاء الا فى السنوات العشرين ، أو الثلاثين الأخيرة فقط . وقد تزايد استخدامه بشكل ملحوظ فى مجال المراجعة بواسطة العينات . ففى الماضى كان المراجعون يختارون عيناتهم بشكل تقديرى ، أو بمعنى آخر طبقا لرأيهم الشخصى . وللأسف لاتوجد طريقة لقياس دقة هذا النوع من العينات . ولكن الحال يختلف بالنسبة للعينات الاحصائية . فهذه الأخيرة تمتاز بميزة كبرى ، وهى أنها يمكن أن تعطى دقة معروفة مقدما وهو أمر لايتوافر فى العينات التقديرية .

ومع تطور الكومبيوتر والميكروكومبيوتر ، فمن الواضح أن دور المحاسب سيتغير إذ سيقل اشتغاله بالحسابات المتعلقة بالبيانات المالية ، وسينشغل أكثر ـ بعملية اتخاذ القرارات فى الشركة . وبالتالى فمن الضرورى أن تكون لدى المحاسب فكرة صحيحة عن الأساليب الموضوعية الكمية .

١ - ٢ الاحصاء الوصفى والاحصاء الاستقرائى

كثيرا ماتفرق مراجع علم الإحصاء بين الإحصاء الوصفى ، والاحصاء الاستقرائى . **والإحصاء الوصفى يعنى مجرد تقديم البيانات فى صورة يسهل فهمها . أما الاحصاء الاستقرائى فيعنى طرق تحليل البيانات بحيث يمكن استنباط النتائج عن المجتمع الذى أخذت منه تلك البيانات .**

ولو كانت لدينا كمية كبيرة من البيانات العددية ، فإن الاحصائى سيحاول أن يرتبها فى صورة تجعل من السهل قراءتها وفهمها . وقد يتضمن هذا تبويب البيانات وتقديمها على شكل جدول للتكرار ، أو تقديمها على شكل رسم بيانى ليسهل تصور معناها فورا . ويمكن بعد ذلك حساب بعض المقاييس ، أو المؤشرات الاحصائية مثل النسب ، أو المتوسطات . وهذه المرحلة الأولى من وظيفة علم الاحصاء ، والتى تتضمن ترتيب البيانات وعرضها وتجميعها تدخل فى نطاق الاحصاء الوصفى . وسنتناول هذا المجال من مجالات علم الإحصاء فى الفصول من السابع الى الحادى عشر . وبالطبع يجب أولا جمع البيانات حتى تستطيع استخلاص المعلومات المفيدة منها . ويمكن اجراء ذلك بوسائل عديدة ، وسنشرح تلك الوسائل فى الفصل السادس .

وأحد الأسباب الهامة لزيادة أهمية الاحصاء فى السنوات الأخيرة هو تطوير أساليب للمساعدة فى عملية اتخاذ القرارات فى مجال الأعمال . وعادة ما يتضمن ذلك اجراء التنبؤات والتقديرات والاستنتاجات عن مجموعة من المتغيرات أكبر من تلك التى تمت ملاحظتها فعلا . وقد تناولنا هذا النوع من الاحصاء الاستقرائى فى الفصول الأربعة الأخيرة من الكتاب (وهى الفصول من الخامس عشر الى الثامن عشر) . ولابد كأساس لفهم الاحصاء الاستقرائى من دراسة نظرية الاحتمالات ، وهى مشروحة فى الفصول (الثانى عشر والثالث عشر والرابع عشر) .

ولتوضيح الفرق بين الاحصاء الوصفى والاحصاء الاستقرائى نطرح المثال التالى :

تدخل شركة كبرى فى آلاف التعاملات المالية كل سنة . وقد طلب من أحد المديرين بالإدارة المالية بالشركة أن يحصى عدد التعاملات التى تتجاوز فى حجمها 1000 £ . وقد قام المدير بفحص 500 تعامل فوجد أن 75 منها تتجاوز ذلك العدد .

وما دامت الشركة مهتمة فقط بالـ 500 حالة التى تمت دراستها يمكن القول أنها تجرى دراسة فى نطاق الاحصاء الوصفى . أما اذا أرادت الشركة أن تصل الى نتائج بشأن جميع التعاملات فإنها عندئذ تدخل فى مجال الاحصاء الاستقرائى . وفى الواقع فإن الشركة عندئذ تقوم بتعميم النتائج على جميع التعاملات فى حين أنها قامت بدراسة عدد محدود منها فقط .

١ - ٣ بعض المصطلحات الشائعة الاستخدام فى الاحصاء

لتسهيل فهم علم الإحصاء من المفيد أن نقدم التعاريف التالية لبعض المصطلحات الاحصائية الشائعة الاستخدام . وستستخدم كثير من هذه المصطلحات فى الفصول التالية :

المجتمع : المجتمع هو المجموعة الكاملة من المفردات المراد بحثها ، وعلى سبيل المثال كل التعاملات المالية المسجلة باحدى الشركات .

العينة : العينة هى فئة جزئية من المجتمع . وأعضاء العينة هم المفردات التى تجرى عليها القياسات . وتستخدم النتائج التى نحصل عليها للعينة لاستنباط النتائج عن المجتمع الذى سحبت منه العينة .

المتغير : المتغير هو مايقاس فى كل مفردة من مفردات العينة ، وعلى سبيل المثال قيمة التعامل المالى ، أو الأجر الذى يحصل عليه عمال المصنع كل أسبوع .

المتغير الكمى : هو متغير يمكن التعبير عنه ككمية عددية . وعلى سبيل المثال أرباح شركة .

المتغير الوصفى : متغير لايمكن قياسه كميا ، وإنما يمكن تصنيفة فقط مثل لون عيون أحد الأشخاص .

المتغير المنفصل : هو متغير لايأخذ إلا قيما محددة منفصلة ، وعلى سبيل المثال عدد المديرين باحدى المؤسسات .

المتغير المستمر : متغير يمكن أن يأخذ أية قيمة فى مدى معين ، وعلى سبيل المثال طول الأشخاص .

البارمتر : البارمتر هى قيمة تصف المجتمع مثل متوسط جميع التعاملات المالية .

الاحصائية : الاحصائية هى قيمة مستنبطة من البيانات لوصف العينة .

النسبة : النسبة هى تقدير لعدد مرات احتواء كمية على كمية اخرى . ويحصل عليها بقسمة احدى الكميتين على الأخرى . وعلى سبيل المثال :

$$\frac{\text{الأجر الأسبوعى لفريد}}{\text{الأجر الأسبوعى لبيرت}} = \frac{£120}{£60} = 2$$

أى أن نسبة أجر فريد الى أجر بيرت هى 2 ، أو بمعنى آخر ، فإن « فريد يتقاضى ضعف أجر بيرت » .

النسبة المئوية : النسبة المئوية هى مانحصل عليه عند ضرب نسبة ما فى 100 . وهكذا فإن النسبة المئوية تدلنا على القيمة التى ستكون عليها الكمية الأولى لو كانت الكمية الثانية مساوية لـ 100 .

وعلى سبيل المثال $\frac{\text{أجر فريد}}{\text{أجر بيرت}} \times 100 = \frac{120}{60} \times 100 = 200$

أى أن اجر فريد يعادل 200% من أجر بيرت . وهذا يعنى أنه مقابل كل 100 جنيه يتقاضاها بيرت ، فإن فريد يتقاضى £200.

التكرار : تكرار قيمة ما ، أو مدى قيم متغير ما ، هو تقدير لعدد المفردات فى العينة التى يأخذ فيها المتغير هذه القيمة أو القيم فى مدى المعنى .

١ ـ ٤ حدود علم الاحصاء وسوء استخدامه

المفروض أن يلعب الإحصاء دورا رئيسيا فى اظهار الحقيقة . ولكن كثيرا من الناس يشكون فى أى بيان احصائى ، ويعتبرون أنه وسيلة لتزييف الواقع ولعل أغلبنا سمعنا التعليق الساخر « إن الأرقام لاتكذب ، ولكن الكذابين يضعون الأرقام » أو « لو قضى على الإحصائيين جميعا لكان هذا أفضل » . ولكن أسوأ التعليقات التى قيلت هى بلاشك مقولة ديزرائيلى الساخرة : « هناك أكاذيب قذرة واحصائيات » . وقد ظهرت هذا الشك فى الإحصاء أساسا بسبب سوء استخدام الاحصاء بواسطة أشخاص غير مؤهلين ، وليس بواسطة الاحصائيين . ومثل هؤلاء الأشخاص يمثلون بالنسبة للاحصائى المؤهل مايمثله أدعياء الطب بالنسبة للطبيب المؤهل . وقد تكون إساءة استخدام الاحصاء ناتجة عن

الجهل ، أو عن نيه مبيتة للخداع (وكثيرا ماترتكب وسائل الاعلان هذه الجريمة) . ولما كان الجمهور كثيرا مايتعرض لهذا النوع من سوء استخدام الاحصاء ، فسنورد هنا بعض الأمثلة لذلك . وبالطبع فإن هدفنا من ذلك ليس تعليم تلك الاستخدامات الخاطئة ، وانما توعية القارىء حتى لاينخدع بها .

مثال : الخطأ الحسابي : « كان أجرى منذ خمس سنوات 25 جنيها فى الأسبوع وهوالآن مئة ، أى أنة زاد بمقدار 400% » ـ والزيادة الصحيحة هى 300% وليست 400% .

مثال الدقة الزائفة : « إن العمر المتوسط الذى يبدأ فيه الأولاد التدخين هو 10.718 سنة » . ونلاحظ أن الرقم المعطى دقيق لأقرب ثلث يوم . والواقع أنه حتى العينة الكبيرة لن تعطينا دقة أفضل من عدة أيام للعمر المتوسط . كما أنه لافائدة حقيقية فى هذا القدر الكبير من الدقة . فلاشك أن اعطاء الرقم دقيقا لأقرب نصف عام سيكون كافيا لجميع الأغراض .

مثال لسوء استخدام الرسومات البيانية : لنفرض أننا نريد تصوير البيانات التالية على رسم بيانى :

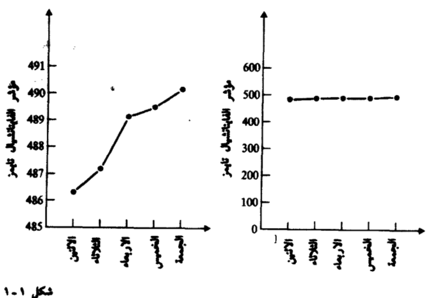
الجمعة	الخميس	الاربعاء	الثلاثاء	الاثنين	اليوم
490.2	489.5	489.1	487.2	486.3	مؤشر الفاينانشيال تايمز

ويعطى الشكل ١ ـ ١ : رؤيتين مختلفتين لنفس هذه المجموعة من البيانات . والرسم البيانى الأيسر يعطى صورة مبالغا فيها للارتفاع فى مؤشر الفاينانشيال تايمز . أما الرسم البيانى الأيمن فهو أقرب للواقع حتى وإن كانت الزيادة فى مؤشر الفاينانشيال تايمز لاترى إلا بالكاد . إذ يجب اختيار مقياس الرسم المناسب ، والأهم من ذلك ضرورة توضيح ذلك المقياس على الرسم فعلا .

مثال : المسح الاحصائى المتحيز : كثيرا ماتقول لنا وسائل الإعلان أن أربع قطط من كل خمس تفضل غذاء القطط « كاتوتشانكس » مثلا . ومع ذلك فنادرا ماتذكر لنا تلك الوسائل كيفية الحصول على هذا الرقم ، وكيف أجريت التجربة ، وما هى أنواع الغذاء الأخرى التى كانت القطط تستطيع الحصول عليها ؟ وفى النهاية يمكننا بسهولة أن نصدق أن أكثر من 80% من القطط الجائعة ستفضل طبقا مليئا بغذاء « كاتوتشانكس » على طبق فارغ تماما!

مثال للسببية المجهولة : لنفترض أن مدير التسويق باحدى الشركات يريد أن يتأكد مما اذا كان شعار جديد للدعاية سيحقق زيادة فى المبيعات . وقد قرر التجربة لمدة شهر بتعاون الادارة . وفى نهاية هذه الفترة يلاحظ أن المبيعات قد زادت فعلا بالنسبة للشهر الماضى ، فيستنتج من ذلك أن الشعار الاعلانى الجديد قد أفاد الشركة فعلا .

ولكن هذا قد لايكون صحيحا مع الأسف . فهناك عدد من الأسباب المحتملة لزيادة المبيعات . فقد تكون المبيعات قد زادت بسبب القرب من أعياد الميلاد (الكريسماس) وفيها تميل جميع المبيعات الى الزيادة . وقد يكون عدد أيام السبت فى هذا الشهر أكثر منه فى الشهر الماضى . وقد يكون السبب هو أن احدى الشركات المنافسة قد أغلقت مؤخرا . ويجب قبل التوصل الى أية نتائج بحث تلك العوامل وغيرها بكل دقة .



شكل ١-١

١ ـ ٥ مصادر الاحصائيات المالية

فى عالمنا المعاصر تنهال علينا البيانات الاحصائية من الادارات الحكومية والشركات الخاصة ومعاهد الأبحاث .

وفى العادة فإن القطاع الخاص يهتم بالمعلومات عن شركة واحدة فقط . وقد تتعلق تلك المعلومات بالأجور ، أو بالمبيعات ، أو بانتاجية العاملين . وفى العادة تكون هذه المعلومات هامة للشركة نفسها أساسا وأحيانا للشركات المنافسة . وتجمع هذه المعلومات للاستعانة بها فى عملية اتخاذ القرارات بالشركة .

أما معلومات القطاع العام فتقدم بجمعها عادة الادارات الحكومية وتتعلق بالبلاد ككل . وفى بريطانيا يقوم المكتب المركزى للاحصاء بتنسيق ونشر نتائج الاحصاءات التى تجمعها تلك الادارات . وعلى سبيل المثال ، فان **« الملخص الاحصائى السنوى »** يتضمن كما كبيرا من المعلومات الهامة والمفيدة عن بريطانيا . وهناك كذلك **« الاحصائيات المالية »** التى تصدر شهريا ، وتتضمن أهم الاحصائيات المالية فى بريطانيا ، ومنها مايتعلق بالحكومة المركزية والحكم المحلى والهيئات العامة والبنوك وشركات البناء والتشييد وشركات التأمين . وبالاضافة الى ذلك ، فان بها معلومات عن أسعار الرهن وأسعار الفائدة ، وأسعار العملات ، والحد الأدنى لمعدل الاقراض . وهناك قسم يتناول شئون المال والاقتصاد بالخارج . ومن المطبوعات الحكومية الأخرى الهامة **« الاتجاهات الاقتصادية »** و **« الكتاب الأزرق عن الدخل القومى والانفاق »** . ومن المطبوعات الأخرى التى تتضمن معلومات مالية واقتصادية هامة جديدة **« الايكونوميست »** و **« الفاينانشيال تايمز »** و **« بانكر »** و **« جورنال أوف ذى انستيتيوت أوف بانكرز »** .

الفصل الثانى

الرسومات البيانية والمعادلات

٢ ـ ١ الخط المستقيم

من طرق المحاسبة المعروفة للجميع بحكم استخدامها فى تقاضى الفواتير المنزلية هى أن يكون المطلوب عبارة عن مبلغ ثابت ، أو ايجار مضافا اليه مبلغ يتناسب مع عدد وحدات السلعة المستهلكة .

وعلى سبيل المثال : فإن فاتورة استهلاك الكهرباء عن فترة معينة قد تتضمن مبلغا ثابتا هو £4.50 مضافا إليها مبلغ 4p لكل وحدة من الطاقة الكهربائية المستهلكة . فاذا كان عدد الوحدات المستهلكة 500 فإن جملة الفاتورة بالجنية تكون :

$$4.50 + 0.04 \times 500 = 4.50 + 20 = £24.50$$

أما اذا كان عدد الوحدات المستهلكة هو 700 وحدة ، فإن جملة الفاتورة بالجنية تكون

$$4.50 + 0.04 \times 700 = 4.50 + 28 = £32.50$$

وبصفة عامة تكون :

(٢ ـ ١)　　جملة الفاتورة = 4.50 + 0.04 × عدد الوحدات المستهلكة

وبالمثل ، فإن فاتورة التليفون عن ثلاثة أشهر قد تتضمن ايجارات قدرها £9.50 زائدا مبلغا اضافيا مقداره 3.5p عن كل وحدة مكالمات إضافية سجلها العدد ، فإذا كان ماسجله العدد فى الشهور الثلاثة هو 200 وحدة ، فإن جملة الفاتورة بالجنيه تكون :

$$9.50 + 0.035 \times 200 = 9.50 + 7 = £16.50$$

وبصفة عامة تكون :

(٢ ـ ٢)　　جملة الفاتورة = 9.50 + 0.035 × عدد الوحدات التى يسجلها العداد

والمعادلتان (٢ ـ ١) و (٢ ـ ٢) هما مثالان للمعادلات الخطية (أو معادلات الخط المستقيم) ولكى نفهم السبب فى استخدام هذا التعبير نأخذ المعادلة (٢ ـ ١) ونختار نخبة من اعداد الوحدات المستهلكة ونحسب جملة الفاتورة فى كل حالة :

عدد الوحدات المستهلكة	100	200	300	400	500	600	700	800
جملة الفاتورة = 4.50 + 0.04 × عدد الوحدات (£)	8.50	12.50	16.50	20.50	24.50	28.50	32.50	36.50

والخطوة التالية هى أن نوقع كل زوج من هذه القيم على ورق رسم بيانى يكون فيه المحور الأفقى ممثلا لعدد الوحدات المستهلكة والمحور الرأسى ممثلا لجملة الفاتورة . ويسمى المنحنى المار بالنقط الموقعة « بالرسم البيانى » لجملة الفاتورة مقابل عدد الوحدات المستهلكة . وكما نرى من الشكل ٢ ـ ١ فإن هذا الرسم البيانى عبارة عن خط مستقيم .

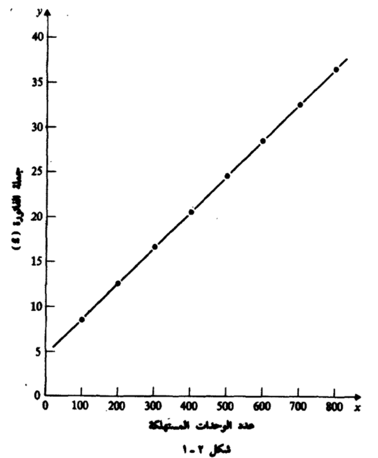
تمرين ٢ ـ ١ ـ ١ : ارسم الشكل البيانى لجملة الفاتورة مقابل عدد الوحدات المقاسة « بالعداد » فى الحالة التى تكون فيها جملة فاتورة التليفون مساوية لإيجار قدرة 9.50 £ مضافا إليه 3.5 بنس لكل وحدة ، وذلك لعدد من الوحدات يتراوح من 150 الى 450 بخطوات مقدارها 50 وحدة .

والشكل البيانى الممثل لاجابة على هذا التمرين عبارة عن خط مستقيم كذلك . وهكذا نرى انه مهما كانت قيم المبلغ الثابتة ورسم الاستهلاك لكل وحدة مستهلكة فإن الرسم البيانى الذى يمثل جملة الفاتورة مقابل عدد الوحدات المستهلكة فى مثل هذا النظام للمحاسبة يكون دائما بشكل خط مستقيم . أى أنه اذا كانت

جملة الفاتورة = a + b × عدد الوحدات المستهلكة

مهما كانت قيم الاعداد a و b فإن الرسم البيانى يكون خطا مستقيما .

ولكن الخطوط المستقيمة لها تطبيقات أخرى كثيرة ، وليس فقط فى حالة الفواتير المنزلية . وسنرى بعضا من هذه



شكل ٢ ـ ١

التطبيقات فى الفصل التاسع . ومن التطبيقات الأخرى الجديرة بالذكر تكاليف انتاج سلعة ما . ويمكن اعتبار أن هذه التكاليف تتكون من تكاليف ثابتة مضافا اليها تكاليف تتناسب مع عدد الوحدات المنتجة ، وتسمى بالتكاليف المتغيرة . وهكذا فإن :

التكاليف الكلية = $a + b$ × عدد الوحدات المنتجة

حيث a التكاليف الثابتة و b التكاليف المتغيرة لكل وحدة منتجة . وهذا الرسم البيانى أيضا عبارة عن خط مستقيم .

ومن وجهة النظر الرياضية ، فإن جميع هذه الحالات متماثلة ، ويمكن تمثيلها بمعادلة واحدة هى :

$$\boxed{y = a + bx}$$

وهذه هى المعادلة العامة للخط المستقيم . والمتغيران x , y يوقعان على المحور الأفقى والرأسى على الترتيب ـ يمكن أن يمثلا أى متغيرين مأخوذين من تطبيق معين . وعلى سبيل المثال : يمكن أن تمثل y جملة الفاتورة فى حين تمثل x عدد الوحدات . أو قد تمثل y التكاليف الكلية فى حين تمثل x عدد الوحدات المنتجة .

تمرين ٢ ـ ١ ـ ٢ : ارسم الشكل الذى يمثل العلاقة $y = 5 - 2x$ مستخدما قيم x التالية 3- ، 2- ، 1- ، 0 ، 1 ، 2 ، 3 .

لاحظ أن a هى قيمة y عندما تكون $x = 0$. أى أنها قيمة y فى المكان الذى يقطع فيه الخط المستقيم محور y .

وتسمى a الجزء المقطوع من محور y ،

وتسمى b معدل تغير y عندما تتغير x بمقدار وحدة واحدة .

أى أنها تساوى مثلا التغير فى جملة الفاتورة عندما تستهلك وحدة اضافية واحدة ، أو التغير فى جملة التكاليف عندما تنتج وحدة اضافية واحدة .

وبالنسبة للرسم البيانى ، فإن b تمثل ميل الخط المستقيم . وعندما تكون قيمة b كبيرة ، فإن هذا يعنى تغيرا كبيرا فى y عندما تتغير x بمقدار وحدة واحدة ، أى أن الخط يكون شديد الانحدار . وبالعكس فعندما تكون قيمة b صغيرة ، فان هذا يعنى تغيرا صغيرا فى y عندما تتغير x بمقدار الوحدة ، وبالتالى يكون الخط قليل الانحدار . ويلاحظ أنه إذا كانت b سالبة ، فإن y تتناقص عندما تزيد x أى أن الخط ينحدر الى أسفل كما فى المثال الأخير أعلاه .

مثال ٢ ـ ١ ـ ١ : رسم خط مستقيم يقطع محور y عند 4.5 ويمر خلال النقطة التى يكون عندها $x = 4$ و $y = 6.5$ فما هو ميل الخط ؟

الإجابة : لنرمز للميل بالرمز b وعندئذ تكون معادلة الخط $y = 4.5 + bx$. ولما كان الخط يمر بالنقطة $x = 4$ ، $y = 6.5$ فإننا نحصل على $6.5 = 4.5 + b \times 4$ أى أن :

$$4b = 2$$

$$b = 0.5$$

إذن ميل الخط هو 0.5 ، وهذا يعنى أنه عند زيادة x بمقدار الوحدة ، فإن y تزيد بمقدار 0.5 .

تمرين ٢ ـ ١ ـ ٣ : خط مستقيم ميله 5 ويمر خلال النقطة التى يكون عندها $x = 3$ و $y = 12$ فما مقدار الجزء الذى يقطعة من محور y ؟

٢ ـ ٢ المعادلات الآنية :

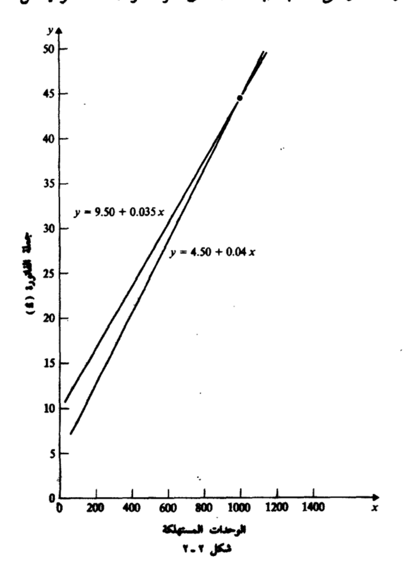
لنعتبر ـ مرة أخرى ـ الفاتورتين المنزليتين اللتين بحثناها فى الجزء ٢ ـ ١ . وباستعمال نفس الرموز المستعملة سابقا للخطوط المستقيمة نجد أن فاتورة الكهرباء

$$y = 4.50 + 0.04x$$

بينما فاتورة التليفون

$$y = 9.50 + 0.035x$$

ويعطى الشكل ٢ ـ ٢ ـ هذين الخطين المستقيمين موقعين على نفس المحاور . ونرى من الرسم البيانى أن هذين الخطين يتقاطعان عند النقطة $x = 1000$ و $y = 44.50$ أى أن هذه النقطة تقع على كلا الخطين . ويحقق زوج القيم $x = 1000$ ، $y = 44.50$ المعادلتين فى آن واحد . ومعنى هذا بالنسبة للمثال الذى ذكرناه هو أن العدد الوحيد من



شكل ٢ ـ ٢

الوحدات المستهلكة من كل من الكهرباء والمكلمات التليفونية الذى ينتج عنه فاتورتان متساويتان هو 1000 وحدة . فاذا تم استهلاك هذا العدد من الوحدات من الكهرباء ، أو من المكالمات التليفونية ، فإن الفاتورتين الناتجتين تكون كل منهما مساويا لـ 44.50 £ .

ويمكن حساب نقطة تقاطع المستقيمين من معادلتيهما دون الحاجة الى رسم . ولهذا الفرض ، فإننا عادة نكتب المعادلتين بحيث تكون الحدود المتغيرة على الجانب الأيسر ، والحدود الثابتة على الجانب الأيمن . وهكذا يصبح لدينا :

$$y - 0.04x = 4.50 \qquad (٢-٣)$$

$$y - 0.035x = 9.50 \qquad (٢-٤)$$

وتسمى مثل هاتين المعادلتين اللتين نبحث عن قيم لـ x و y تحققهما معا بالمعادلات الآنية :

والخطوات التى تستعمل لحل هذه المعادلات هى :

(أ) ضرب جميع حدود المعادلة فى مقدار ثابت .
(ب) جمع ، أو طرح المعادلات لاستبعاد المتغيرات .

وبالنسبة للمثال المذكور لاداعى لاستخدام الخطوة (أ) لأن طرح احدى المعادلتين من الأخرى يؤدى الى استبعاد y ، ويجعل الوصول الى حل لـ x ممكنا .

اذ أن طرح (٢-٤) - (٢-٣) يعطى

$$0.005x = 5$$

وبالتالى فإن :

$$x = \frac{5}{0.005} = 1000$$

وبعد ايجاد قيمة x يمكن التعويض بها فى احدى المعادلتين للحصول على y . وباستخدام المعادلة (٢-٣) نحصل على $y = 4.50 + 0.04 \times 1000 = 4.50 + 40 = 44.50$ ومن هذا نصل الى زوج القيم $x = 1000$ ، $y = 44.50$ الذى حصلنا عليه من الرسم .

مثال ٢-٢-١ : تقوم شركة ما بتصنيع منتجين هما A و B بواسطة عمليتى تصنيع هما X و Y .

والطاقة القصوى للعملية X هى 1900 ساعة وللعملية Y هى 5000 ساعة . وتحتاج الوحدة الواحدة من المنتج A الى أربع ساعات من العملية X وساعتين من العملية Y . أما الوحدة الواحدة من المنتج B فتحتاج الى ساعة من العملية X وخمس ساعات من العملية Y .

والمطلوب حساب عدد الوحدات التى تنتج من كل من المنتجين A و B لكى يتم استغلال الحد الأقصى من الطاقة المتاحة (م م ت أ- الأساس ب نوفمبر ١٩٧٩) .

الإجابة : لنفرض أنه تقرر انتاج u من وحدات المنتج A و v من وحدات المنتج B . وعندئذ سيكون عدد ساعات العملية X اللازمة هو $4u + v$. فإذا استغلت الطاقة القصوى المتاحة للعملية X فسيكون .

$$4u + v = 1900 \qquad (٢-٥)$$

وبنفس الطريقة اذا استغلت الطاقة القصوى للعملية Y فسيكون :

$$2u + 5v = 5000 \qquad (٢ - ٦)$$

وهكذا يمكن إيجاد عدد الوحدات التى يلزم انتاجها لاستغلال كل الطاقة الانتاجية المتاحة بحل المعادلتين (٢ ـ ٥) و (٢ ـ ٦) كزوج من المعادلات الآنية فى u و v .

وبضرب طرفى المعادلة (٢ ـ ٦) فى 2 نحصل على

$$4u + 10v = 10\,000 \qquad (٢ - ٧)$$

ويطرح المعادلة (٢ ـ ٥) من المعادلة (٢ ـ ٧) نحصل على

$$9v = 8100$$

ومنها

$$v = 900$$

وبتعويض هذه القيمة فى المعادلة (٢ ـ ٥) نحصل على

$$4u + 900 = 1900$$

أى أن : $4u = 1000$

ومنها نستنتج أن : $u = 250$

وهذا يعنى أن الطاقة الانتاجية المتاحة تكون مستغلة تماما لو أنتجنا 250 من وحدات المنتج A و 900 من وحدات المنتج B .

تمرين ٢ ـ ٢ ـ ١ : استخدم طريقة الرسم البيانى لحل المعادلتين الآنيتين التاليتين :

$$2x - 3y = 9$$

$$4x - y = 8$$

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٧٩)

احدى تطبيقات المعادلات الآنية هو أسلوب بحوث العمليات ويسمى بالبرمجة الخطية . وفى العادة يتناول هذا التطبيق موقفا انتاجيا كالموقف المذكور . فى المثال ٢ ـ ٢ ـ ١ ، ولكن المطلوب يكون ليس مجرد استغلال كل الطاقة المتاحة .

وإنما تحقيق هدف ما مثل الوصول الى الحد الأقصى للأرباح أو المشاركة .

ويمكن تمثيل مسائل البرمجة الخطية التى تحتوى على متغيرين فقط بيانيا ، وعادة يكون الحل هو تقاطع مستقيمين .

مثال ٢ ـ ٢ ـ ٢ : تقوم احدى الشركات بصناعة طرازين من الشنيورات الكهربائية . أحدهما بسرعة واحدة ، والثانى بسرعتين .

ويوضح الجدول التالى متطلبات تصنيع الطرازين والطاقة الانتاجية المتاحة :

	ساعات التشغيل	ساعات التجميع	ساعات الاختبار	مساحة التخزين (قدم مربع)
الطراز				
ذو سرعة واحدة	2.0	1.5	0.5	1.0
ذو سرعتين	2.5	1.0	1.0	1.0
الطاقة المتاحة	40 000	24 000	14 000	30 000

والمطلوب :

(أ) استخدام الرسم البيانى لحل مسألة جعل الارباح تصل الى الحد الأقصى مع الأخذ فى الاعتبار متطلبات ، وقيود الانتاج المذكور أعلاه علما بأن الربح لكل وحدة هى £3 و £5 للشنيور ذى السرعة الواحدة ، وذى السرعتين على الترتيب . ويجب أن يوضح الرسم البيانى المجال الممكن للحل .

(ب) ايجاد عدد الوحدات التى يجب أنتاجها من كل طراز والأرباح الناتجة والقيود الملزمة فى الحل

(م م ت أ - الجزء الرابع - يونيو ١٩٧١)

الاجابة :

(أ) نفترض أن الشركة تصنع x من الشنيورات ذات السرعة الواحدة ، و y من الشنيورات ذات السرعتين . عندئذ تكون القيود كما يلى :

$$2x + 2.5y \leqslant 40\,000$$
$$1.5x + y \leqslant 24\,000$$
$$0.5x + y \leqslant 14\,000$$
$$x + y \leqslant 30\,000$$

أما الدالة التى نريد أن نجعلها تصل إلى الحد الأقصى ،فهى

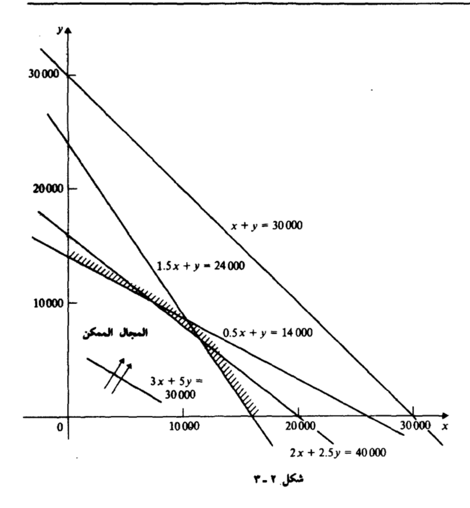
$$C = 3x + 5y$$

وبشكل ٢ - ٣ : رسم بيانى للمستقيمات

$$2x + 2.5y = 40\,000$$
$$1.5x + y = 24\,000$$
$$0.5x + y = 14\,000$$
$$x + y = 30\,000$$

ومن هذا الرسم نجد أن حلول المسألة يجب أن تقع داخل ، أو على حدود الشكل الرباعى الذى تحده المستقيمات الثلاثة الأولى . (أما المستقيم الرابع فهو غير مؤثر) . وهذه المساحة هى المجال الممكن . والقيم الموجودة فيه فقط هى التى تحقق كل الاشتراطات . ولحل المسألة يجب أن نعتبر مستقيمات صورتها كما يلى :

$$3x + 5y = \text{ثابت}$$



شكل ٢ - ٣

ونجد من بينها ذلك المستقيم الذى تكون قيمة الثابت بالنسبة له أكبر ما يمكن مع وجود إحدى نقطة فى المجال الممكن .

ولهذا الغرض نرسم أحد هذه المستقيمات بأية قيمة مناسبة للثابت (ولتكن 30 000 مثلا) ثم نضع على المستقيم مثلثا ونحركة موازيا لنفسه حتى يصل إلى الوضع الذى يكون فيه ملامسا بالكاد للمجال الممكن . وفى العادة سيحدث هذا التلامس عند أحد اركان المجال الممكن ، وهذا الركن هو الحل المطلوب .

(ب) فى المثال المذكور يكون الحل عند نقطة تقاطع المستقيمين .

$$2x + 2.5y = 40\,000$$
$$0.5x + y = 14\,000$$

وهذان هما القيدان الملزمان .

ومن الرسم البيانى نجد أن هذه النقطة تقع عند $x = 6667$ و $y = 10667$ ويمكن التحقق من الحل المشار إليه بحل المعادلتين الآنيتين . وهكذا فإن السياسة التى تؤدى إلى جعل الأرباح تصل الى الحد الأقصى هى انتاج 6667 شنيورا بسرعة واحدة و 10667 شنيورا بسرعتين . والربح الناتج فى هذه الحالة هو

$$£(3 \times 6667 + 5 \times 10\,667) = £73\,334$$

تمرين ٢ ـ ٢ ـ ٢ : تقوم احدى الشركات بتشغيل وثقب نوعين من المسبوكات هما X و Y . والزمن اللازم لتشغيل وثقب المسبوكة الواحدة بما فى ذلك زمن ضبط الماكينة هو كما يلى :

المسبوكة	ساعات التشغيل	ساعات الثقب
X	4	2
Y	2	5

ولدى الشركة مخرطتان للتشغيل ، وثلاثة مثاقيب ، وساعات العمل فى الأسبوع هى 40 ، ولايوجد وقت ضائع ، كما أنه غير مسموح بالعمل وقتا اضافيا . والتكاليف المتغيرة لنوعى المسبوكات هى 6 £ للمسبوكة . أما التكاليف الثابتة فهى 50 £ فى الأسبوع .

فإذا كان ثمن بيع المسبوكة X هو 15 £ للواحدة ، وثمن بيع المسبوكة Y هو 18 £ للواحدة علما بأنه لاتوجد حدود على عدد المبيعات من كل نوع من المسبوكات . واذا كانت الشركة تريد تحقيق الحد الأقصى من الأرباح فانها تحتاج إلى :

(١) وضع النموذج الكامل للبرمجة الخطية لهذه المسألة .

(٢) حل المسألة بالرسم البيانى .

(م م ت أ ـ الجزء الرابع ـ نوفمبر ١٩٧٩)

وبالطبع ، فإن فكرة المعادلات الآنية لاتقتصر على حل معادلتين بهما متغيران فقط . ونفس المبدأ ينطبق على حل n من المعادلات تحتوى على n من المتغيرات مهما كانت قيمة العدد n . ولكن الحسابات تصبح صعبة اذا زاد العدد n على 3 وعمليا فإن المعادلات التى تحتاج الى حل عدد أكبر من المعادلات تحل بواسطة الكومبيوتر . ولكن ثلاث معادلات بها ثلاثة متغيرات لاتحتاج للجوء إلى الكومبيوتر . وسنتناول الآن بعض المسائل من هذا النوع . ولاتمثل المعادلات المختلفة فى هذه الحالة مستقيمات كما فى حالة المتغيرين ، وانما مستويات ، وحل مسألة تتضمن ثلاث معادلات آنية يعنى إيجاد نقطة تقاطع المستويات الثلاثة .

مثال ٢ ـ ٢ ـ ٣ : حل المعادلات التالية

$$2x - 4y + z = 7$$
$$x + 3y - 2z = 11$$
$$3x - y - 3z = 4$$

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٨)

الاجابة :

$$2x - 4y + z = 7 \quad (٢-٨)$$
$$x + 3y - 2z = 11 \quad (٢-٩)$$
$$3x - y - 3z = 4 \quad (٢-١٠)$$

وبضرب (٢ ـ ٩) × 2

$$2x + 6y - 4z = 22 \quad (٢-١١)$$

ويطرح (٢-٨) من (٢-١١)

(٢-١٢) $10y - 5z = 15$

ويضرب (٢-٩) × 3

(٢-١٣) $3x + 9y - 6z = 33$

ويطرح (٢-١٠) من (٢-١٣)

(٢-١٤) $10y - 3z = 29$

ويطرح (٢-١٢) من (٢-١٤)

$$2z = 14$$

إذن $z = 7$

وبتعويض $z = 7$ فى المعادلة (٢-١٢)

$$10y = 15 + 5 \times 7 = 15 + 35 = 50$$

إذن $y = 5$

وبتعويض $z = 7$ و $y = 5$ فى (٢-٩)

$$x = 11 - 3 \times 5 + 2 \times 7 = 11 - 15 + 14$$

اذن $x = 10$

وهذا يعنى أن المعادلات الثلاثة تتحقق فى آن واحد إذا كانت $x = 10$ ، $y = 5$ ، $z = 7$

مثال ٢-٢-٤ : تنتج احدى الشركات ثلاثة منتجات x و y و z على ثلاثة أنواع مختلفة من الماكينات الموجودة فى ثلاثة أقسام A و B و C والطاقة الشهرية لإنتاج كل قسم محددة كما يلى :

القسم	ساعات تشغيل الماكينات
A	1800
B	2100
C	1300

علما بأن الماكينات متخصصة ، وكل نوع منها يقوم بوظيفته المحددة فقط . ويتم تصنيع كل منتج فى الأقسام الثلاثة مما يستغرق أوقاتا مختلفة كما يلى :

المنتج	الأقسام		
	A	B	C
	عدد ساعات التشغيل للوحدة		
x	2	6	1
y	2	1	3
z	3	2	2

وقد طلب من المشرف على ضبط الأنتاج أن يحقق أعلى استخدام لطاقة كل الماكينات .

احسب عدد وحدات المنتجات الثلاثة x و y و z التى يجب أنتاجها حتى تتم الاستفادة الكاملة من طاقة كل قسم شهريا .

(م م ت أ - الجزء الأول نوفمبر ١٩٧٥)

الاجابة : لنفرض أن الشركة قررت أن تنتج x و y و z من المنتجات الثلاثة شهريا عندئذ فان المعادلات التى يجب أن تتحقق هى :

$$2x + 2y + 3z = 1800 \quad (٢-١٥)$$

$$6x + y + 2z = 2100 \quad (٢-١٦)$$

$$x + 3y + 2z = 1300 \quad (٢-١٧)$$

وبضرب (٢-١٧) × 2

$$2x + 6y + 4z = 2600 \quad (٢-١٨)$$

وبطرح (٢-١٥) من (٢-١٨)

$$4y + z = 800 \quad (٢-١٩)$$

وبضرب (٢-١٧) ×6

$$6x + 18y + 12z = 7800 \quad (٢-٢٠)$$

وبطرح (٢-١٦) من (٢-٢٠)

$$17y + 10z = 5700 \quad (٢-٢١)$$

وبضرب (٢-١٩) × 10

$$40y + 10z = 8000 \quad (٢-٢٢)$$

وبطرح (٢-٢١) من (٢-٢٢)

$$23y = 2300$$

اذن

$$y = 100$$

وبتعويض $y = 100$ فى المعادلة (٢-١٩)

$$z = 800 - 4 \times 100 = 800 - 400$$

أى ان

$$z = 400$$

وبتعويض $y = 100$, $z = 400$ فى المعادلة (٢-١٧)

$$x = 1300 - 3 \times 100 - 2 \times 400$$

$$= 1300 - 300 - 800$$

أى أن

$$x = 200$$

وهذا يعنى أن المشرف على ضبط الانتاج سيتمكن من تحقيق الاستخدام الكامل للطاقة الانتاجية المتاحة اذا تم انتاج 200 وحدة من المنتج x و 100 وحدة من المنتج y و 400 وحدة من المنتج z .

تمرين ٢-٢-٣ : حل مجموعة المعادلات التالية :

$$p + q + 2v = 6$$

$$p - q + v = 2$$

$$2p + q = 3$$

(م م ت أ- الأساس ب- مايو ١٩٧٩)

٢-٣ المنحنى من الدرجة الثانية

سنبدأ هذا الموضوع بدراسة المثال التالى :

وجدت إدارة إحدى الشركات أن دخل المبيعات كدالة لعدد الوحدات المباعة يتبع المعادلة التالية فى المدى بين 30 , 80 وحدة مباعة :

دخل المبيعات (£) = 20 £ × (عدد الوحدات المباعة) ـ 0.15 £ × (عدد الوحدات المباعة)^2

فى حين تتبع جملة التكاليف المعادلة التالية :

جملة التكاليف (£) = 450 £ + 2 £ × (عدد الوحدات المباعة)

ارسم رسما بيانيا يوضح الخطوط الممثلة للدخل والتكاليف .

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٢)

معادلة التكاليف معروفة لدينا ، فهى من النوع الخطى الذى سبقت لنا دراسته فى البند ٢ ـ ١ . أى أنها على الصورة

$$y = a + bx$$

حيث y جملة التكاليف و x عدد الوحدات المباعة و a تساوى 450و b وتساوى 2 . وهكذا ، فإننا نعلم أن الرسم البيانى لجملة التكاليف عبارة عن مستقيم يقطع 450 من محور y وميله يساوى 2 .

أما معادلة الدخل فهى مختلفة نوعا . فهى تتضمن حدا يدخل فيه المقدار (عدد الوحدات المباعة)^2 . ويمكن توقيع الرسم البيانى لهذه المعادلة بنفس الطريقة التى يوقع بها الرسم البيانى للمعادلات الخطية الموضحة فى البند ٢ ـ ١ ، أى بأخذ مجموعة من القيم لمتغير « عدد الوحدات المباعة » وحساب القيم المقابلة » لدخل المبيعات » وتوقيع كل زوج من القيم ، وتوصيل النقط . ويتم التوصيل بواسطة منحنى أملس بقدر الامكان .

وفى المثال المعنى نوجد القيم التالية :

عدد الوحدات المباعة	30	40	50	60	70	80
(عدد الوحدات المباعة)^2	900	1600	2500	3600	4900	6400
عدد الوحدات المباعة × 20	600	800	1000	1200	1400	1600
(عدد الوحدات المباعة)^2 × 0.15	135	240	375	540	735	960
دخل المبيعات	465	560	625	660	665	640

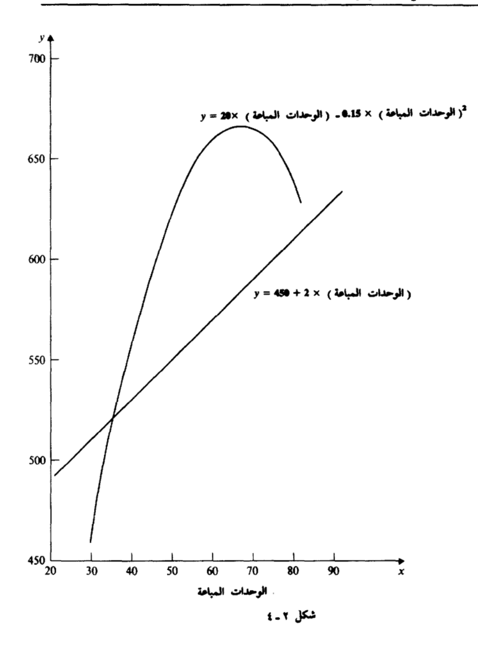
والرسم البيانى الذى نحصل عليه من هذا الجدول موضح بشكل (٢ ـ ٤) . كما وضحنا بالشكل الرسم البيانى لمعادلة التكاليف وهوخط مستقيم .

ويسمى الرسم البيانى لدخل المبيعات منحنى من الدرجةالثانية (أو . قطع مكافىء) ومثل هذا المنحنى يرتبط دائما بمعادلة على الصورة .

$$y = ax^2 + bx + c$$

حيث a و b و c ثوابت . وهذ هى الصورة العامة لمعادلة منحنى الدرجة الثانية . وبالنسبة للمثال المعطى ، فإن $a = -0.15$، $b = 20$ ، $c = 0$ حيث y تمثل دخل المبيعات و x تمثل عدد الوحدات المباعة .

ولكل منحنى من الدرجة الثانية نهاية عظمى واحدة (كما فى المثال المعطى) ، أو نهاية صغرى واحدة وتقابلنا هذه الحالة الأخيرة عندما يكون المعامل a المضروب فى الحد المربع موجبا . وبالفصل الخامس استكمال لدراسة نقط النهاية العظمى والصغرى . وتتوقف حدة النهاية العظمى والصغرى على القيم النسبية للثابتين a و b وهما معاملا الحد المربع ، والحد الخطى على الترتيب . وفى مثالنا يصبح دخل المبيعات صفرا إذا كان عدد الوحدات المباعة صفرا ، وهكذا فإن المنحنى يمر بنقطة تقاطع المحاور . وبصفة عامة قد يكون هناك ثابت c يمثل الجزء الذى يقطعة المنحنى من المنحور الرأسى .



شكل ٢ ـ ٤

ونلاحظ أنه عند تقاطع المنحنى مع المحور الأفقى يكون :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

وبالتالى فإن قيمتى x عند نقط التقاطع تكون هى حلا معادلة الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$.

تمرين ٢ ـ ٣ ـ ١ : ارسم الشكل البيانى للمعادلة $y = x^2 - 6x + 9$ فى المدى من $x = 1$ الى $x = 5$ ثم اوجد حل المعادلة $x^2 = 6x - 9$ من الرسم البيانى .

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٥)

وهناك كثير من المواقف ـ وسنرى أمثلة لبعضها فى الفصل الثالث ـ التى تتطلب حل معادلة من الدرجة الثانية . وليس أسلوب الرسم البيانى أفضل الطرق لحل هذه المعادلات عمليا .

وهناك طريقتان لحل معادلات الدرجة الثانية : **بالتحليل إلى عوامل أو باستخدام قانون حل معادلة الدرجة الثانية** . والطريقة الأولى هى الأسرع والأسهل اذا أمكن استخدامها ، ولاينصح باللجوء إلى القانون إلا كحل أخير .

ولتوضيح طريقة التحليل الى عوامل نقوم بحل المثال التالى :

حل المعادلة $5x - 2 = 2x^2$

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٣)

اذا أعدنا كتابة المعادلة فى الصورة القياسية لمعادلات الدرجة الثانية فإنها تصبح .

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

وتتطلب عملية التحليل الى عوامل التعبير عن الطرف الأيسر للمعادلة كحاصل ضرب عاملين كل منهما فى الصورة $a + bx$ أى أنه خطى بالنسبة لـ x .

ولكى يكون حاصل الضرب مساويا للصفر ، فلابد أن يكون أحد العاملين مساويا للصفر . وهكذا نحصل على معادلتين خطيتين يمكن حلهما لايجاد قيمة x . وحلا هاتين المعادلتين هما قيمتا x عند نقطتى تقاطع المنحنى مع محور x .

ويمكن بالتمرين التمرس على إيجاد العاملين اذا كان ذلك ممكنا وكتابة المعادلة فورا فى صورة حاصل ضرب عاملين . ولكننا سنشرح فيما يلى طريقة لايجاد العوامل اذا كان ذلك ممكنا ، وهذه الطريقة طويلة الى حد ما ، ولكنها فعالة فى الوصول الى العوامل اذا كانت موجودة .

وعلى سبيل المثال ، فإن المعادلة السابقة محللة إلى عواملها تأخذ الصورة :

$$(x - 2)(2x - 1) = 0$$

ويمكن التحقق من ذلك بفك الأقواس .

وبالتالى ، فإننا نحصل على حل المعادلة بحل المعادلتين الخطيتين $2x - 1 = 0$ أى إن $x = 0.5$, $x - 2 = 0$ أى أن $x = 2$ وهكذا ، فإننا لو رسمنا المنحنى $y = 2x^2 - 5x + 2$ سنجد أنه يقطع محور x عند النقطتين $x = 2$, $x = 0.5$.

للوصول الى صورة المعادلة المحللة الى عامليها نجرى الخطوات التالية . نجد عددين مجموعهما هو معامل x (وهو فى هذه الحالة -5) وحاصل ضربهما هو حاصل ضرب الحد الثابت فى معامل x^2 (وهو فى هذه الحالة $2 \times 2 = 4$) (فإذا لم نستطع إيجاد مثل هذين العددين نترك طريقة التحليل الى العوامل ، ونستعمل القانون) والعددان المناسبان فى حالتنا هذه هما -4 , -1 .

وبعد ذلك نعيد كتابة المعادلة مع تقسيم الحد المحتوى على x إلى جزئين باستخدام العددين . وفى هذه الحالة نحصل على $2x^2 - x - 4x + 2 = 0$ ثم نأخذ أكبر عامل مشترك من الزوج الأول من الحدود ومن الزوج الثانى . لاحظ أن أكبر عامل مشترك يمكن استخراجه من الحدين الثانيين قد يكون الوحدة . وفى المثال المعطى ، فإن العاملين هما x , -2 على الترتيب وهكذا نحصل على

$$x(2x - 1) - 2(2x - 1) = 0$$

ونتيجة لطريقة تقسيم الحد المحتوى على x فإن هذه الطريقة تعطى دائما حدين بهما عامل مشترك . وفى هذه الحالة ، فإن العامل المشترك هو $2x - 1$. وباستخراج هذا العامل المشترك تنتهى عملية التحليل الى عوامل ، فنحصل على

$$(x - 2)(2x - 1) = 0$$

وهى نفس النتيجة المعطاه أعلاه

مثال ٢ - ٣ - ١ : حل المعادلة $6x^2 = 13x - 5 = 0$

الاجابة العددان اللذان يساوى مجموعهما 13 وحاصل ضربهما 30 - هما 15 و 2 - وهكذا نكتب المعادلة

$$6x^2 + 15x - 2x - 5 = 0$$

ثم نأخذ أكبر عامل مشترك من الحدين الأولين ، ومن الحدين الأخيرين ، فنحصل على :

$$3x(2x + 5) - 1(2x + 5) = 0$$

وباستخراج العامل المشترك

$$(3x - 1)(2x + 5) = 0.$$

وهكذا ، فإن حلى المعادلة يعطيان بالمعادلتين

$3x - 1 = 0$ أى $x = 1/3$

و $2x + 5 = 0$ أى $x = -2.5$

تمرين ٢ - ٣ - ٢ : حل المعادلة $8x^2 - 26x + 11 = 0$

وقد درسنا فى تمرين سابق بهذا الجزء المعادلة

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

وعند تحليل هذه المعادلة إلى عامليها نحصل على

$$(x - 3)^2 = 0$$

وهذا يعنى أنه فى هذه الحالة لايوجد إلا حل واحد للمعادلة ، وهو $x = 3$ ومن الرسم البيانى نجد أن منحنى الدرجة الثانية يمس محور x فى نقطة واحدة بدلا من أن يقطعة فى نقطتين .

فإذا تعذر التحليل إلى عوامل لاستحالة إيجاد العوامل ، أو لأننا لم نتمرس بالدرجة الكافية على إيجادها ، فإننا نوجد الحل باستخدام قانون معادلة الدرجة الثانية . ويقرر هذا القانون أن المعادلة .

$$ax^2 + bx + c = 0$$

لها الحلان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ونحصل على أحد الحلين باختيار علامة « الزائد » التى فى البسط ، ونحصل على الحل الثانى باختيار علامة « الناقص » .

مثال ٢ ـ ٣ ـ ٢ : حل المعادلة $3x^2 + 5x - 15 = 0$

الاجابة : ليس من الممكن إيجاد عددين مجموعهما 5 ، وحاصل ضربهما 45 - ولهذا نلجأ إلى القانون وطبقا له ، فان حلى المعادلة هما

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times (-15)}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{205}}{6} = \frac{-5 \pm 14.318}{6}$$

الاشارة الموجبة تعطى القيمة $x = 1.553$ والاشارة السالبة تعطى القيمة $x = -3.220$ وهذه هى قيم x التى يقطع عندها منحنى الدرجة الثانية $y = 3x^2 + 5x - 15$ محور x .

تمرين ٢ ـ ٣ ـ ٣ : حل المعادلة $13x^2 + 7x - 8 = 0$

لاحظ أنه عند تطبيق القانون على المعادلة

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

فإن المقدار $b^2 - 4ac$ الموجود تحت الجذر يساوى صفرا .

وبالتالى ، فإن الحلين المقابلين للإشارة الموجبة والسالبة ينطبقان . ويمكن القول بأنه إذا كان المنحنى من الدرجة الثانية يسمى محور x فى نقطة واحدة ، فإن $b^2 - 4ac = 0$.

وبالطبع توجد معادلات من الدرجة الثانية يقل فيها المقدار $b^2 - 4ac$ عن الصفر وعلى سبيل المثال

$$3x^2 + 5x + 15 = 0$$

وكذلك المعادلة

$$-x^2 + 2x - 7 = 0$$

وبالنسبة لعلم الحساب العادى لايوجد جذر تربيعى لمقدار سالب ، ولهذا لايمكن حساب $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ولذلك فإن القانون لايمكننا من إيجاد أيه حلول لأنها غير موجودة أصلا . وعلى الرسم البيانى ، فإن هذا يعنى منحنيات من الدرجة الثانية لاتقطع ولاتمس محور x اطلاقا . ويبين شكل (٢ ـ ٥) الرسم البيانى للمعادلتين $y = 3x^2 + 5x + 15$ و $y = -x^2 + 2x - 7$.

ومع أن تعبير « المعادلات الآنية » يستخدم أكثر بالنسبة للمعادلات الآنية الخطية إلا أن نفس الفكرة الأساسية يمكن أن تطبق على مجموعات من المعادلات من الدرجة الثانية ، أو خليط من المعادلات الخطية ومعادلات الدرجة الثانية . ويمكن استخدام نفس طرق الحل . أى أنه يمكن حل المعادلات بواسطة الرسم البيانى بإيجاد نقط تقاطع المنحنيات ، كما يمكن الحل بتجميع المعادلات بطريقة تؤدى إلى استبعاد المتغيرات الواحد تلو الآخر حتى يتبقى أحدها فقط حيث تحل المعادلة لإيجاد قيمته ، ثم يتم التعويض بهذه القيمة للوصول الى باقى المتغيرات . وسنختتم هذا الجزء ببعض الأمثلة والتمارين على ذلك .

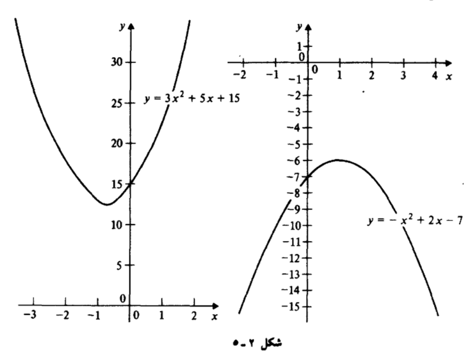
مثال ٢ ـ ٣ ـ ٣ : تقوم احدى الشركات بانتاج منتج واحد . وتباع وحدة المنتج بمبلغ 15 £ وتكاليف التشغيل كما يلى :

£	
800	تكاليف ثابتة أسبوعية .
5	تكاليف متغيرة لكل وحدة منتجة

كما أن هناك تكاليف للصيانة طبقا للمعادلة .

$$M = 0.009x^2$$

حيث x عدد الوحدات المنتجة أسبوعيا .



شكل ٢ ـ ٥

والمطلوب :

(أ) حساب مدى الانتاج الممكن بوحدات صحيحة بحيث لاتتبقى وحدات غير مشطبة فى نهاية الأسبوع ، وبحيث لايقل الربح الأسبوعى عن 200 £ .

(ب) توضيح الإجابة على الجزء (أ) برسم بيانى لمعادلة الربح .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٨٠)

الاجابة :

(أ) الدخل الاسبوعى هو $15x$

والتكاليف الأسبوعية الكلية تساوى $800 + 5x + 0.009x^2$ ، وبالتالى ، فإن الربح الأسبوعى .

$$y = 15x - (800 + 5x + 0.009x^2)$$

أى أن

$$y = -0.009x^2 + 10x - 800$$

وبالتالى ، فإن الربح يساوى 200 £ اذا كان

$$-0.009x^2 + 10x - 800 = 200$$

أو

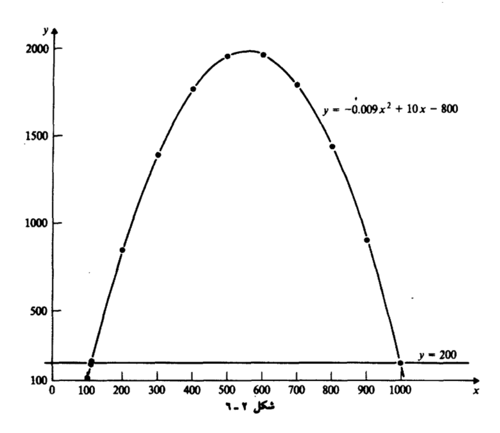
$$-0.009x^2 + 10x - 1000 = 0$$

ولما كان معامل x^2 سالبا ، فإن لدينا منحنيا من الدرجة الثانية له نهاية عظمى وبالتالى فإن الربح سيزيد عن 200 £ لقيم x الواقعة بين حلى المعادلة المذكورة أعلاه . ويمكن ايجاد عددين مجموعهما 10 وحاصل ضربهما 9 وهذان العددان هما 1,9 ، وهكذا نستطيع التحليل إلى عاملين باعادة كتابة المعادلة كما يلى :

$$-0.009x^2 + x + 9x - 1000 = 0$$

ويمكن اختصار هذه المعادلة الى

$$x(-0.009x + 1) - 1000(-0.009x + 1) = 0$$



شكل ٢ ـ ٦

وبالتالى فإن $(x - 1000)(-0.009x + 1) = 0$

وهذا يعنى أن الحلين هما : $x = 1000 \text{ and } x = \dfrac{1}{0.009} = 111.111$

وهكذا ، فإن عدد الوحدات التى يلزم انتاجها لتحقيق ربح 200 £ على الأقل يقع فى المدى من 112 الى 1000 شاملا هذين الرقمين .

(ب) انظر قيم دالة الربح المعطاه بالجدول المعطى فى الصفحة التالية .
ويبين شكل (٢ ـ ٦) الرسم البيانى لهذه الدالة . ونقط نهاية المدى المطلوبة فى الجزء (أ) هى نقط تقاطع هذا المنحنى مع المستقيم $y = 200$.

مثال ٢ ـ ٣ ـ ٤ : مستطيل محيطه 114 مترا ومساحته 800 مترا مربعا . أوجد بعديه .
(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٨)

x	100	111	112	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
$-0.009x^2$	−90	−110.9	−112.9	−360	−810	−1440	2250	−3240	−4410	−5760	−7290	−9000
$10x$	1000	1110	1120	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
−800	−800	−800	−800	−800	−800	−800	−800	−800	−800	−800	−800	−800
$y = -0.009x^2 + 10x - 800$	110	199.1	207.1	840	1 390	1 760	1 950	1 960	1 790	1 440	910	200

الاجابة : لنفترض أن بعدى المستطيل هما : x , y

عندئذ تكون المعادلتان اللتان يلزم حلهما هما :

$$2x + 2y = 114 \qquad (٢ - ٢٣)$$

$$xy = 800 \qquad (٢ - ٢٤)$$

ومن المعادلة (٢ - ٢٣) نحصل على

$$x + y = 57$$

أى أن

$$y = 57 - x$$

وبتعويض هذه القيمة فى المعادلة (٢ - ٢٤) يصبح لدينا :

$$x(57 - x) = 800$$

وبالتالى فإن

$$x^2 - 57x + 800 = 0$$

$$(x - 25)(x - 32) = 0$$

ويكون بعدا المستطيل 25 مترا ، 32 مترا .

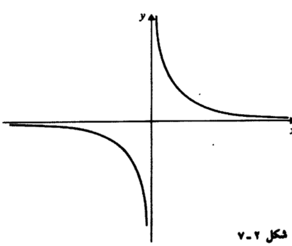
وبذا يكون حل المسألة منتهيا ، ومع ذلك ، فمن المفيد أن نفكر فى حلها بالرسم البيانى .

والمعادلة (٢ - ٢٣) هى بالطبع معادلة خط مستقيم . أما المعادلة (٢ - ٢٤) فهى معادلة قطع زائد قائم . وهذا المنحنى له عادة معادلة فى الصورة

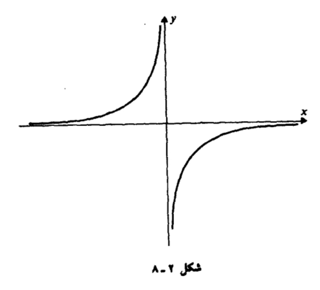
$$\boxed{x \cdot y = \text{ثابت}}$$

والرسم البيانى لها يكون بالصورة الموضحة بشكل (٢ - ٧) (اذا كان الثابت موجبا) أو بشكل (٢ - ٨) (اذا كان الثابت سالبا) .

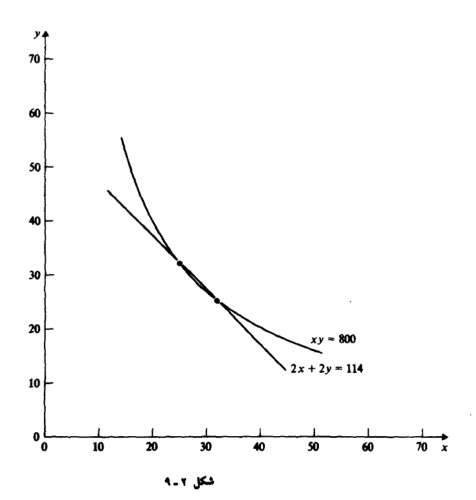
وبالمثال المذكور ، فإن الثابت موجب ، ونحن نبحث عن تقاطع المستقيم $2x + 2y = 114$ مع القطع الزائد $xy = 800$. ويحدث التقاطع عند النقطتين $x = 25 , y = 32$ و $x = 32 , y = 25$ ، كما هو موضح بشكل (٢ - ٩) .



شكل ٢ - ٧



شكل ٢ ـ ٨



شكل ٢ ـ ٩

مثال ٢ ـ ٣ ـ ٥

(أ) ارسم الشكل البيانى للمعادلتين .

$$2x + y = 8$$
$$y = x^2 - 2x + 4$$

لقيم x الواقعة من 2- إلى 4+ شاملة هاتين القيمتين .

(ب) من الرسم البيانى حدد نقط تقاطع المعادلتين ، ثم اثبت دقة الرسم البيانى بحل المعادلتين آنيا .

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٢)

الاجابة : ـ

(أ) يمكن اعادة كتابة المعادلتين كما يلى :

$$y = 8 - 2x$$
$$y = x^2 - 2x + 4$$

ويبين الجدولان التاليان القيم المحسوبة من المعادلتين

x	-2	-1	0	1	2	3	4
8	8	8	8	8	8	8	8
$-2x$	4	2	0	-2	-4	-6	-8
$y = 8 - 2x$	12	10	8	6	4	2	0

x	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	4	2	0	-2	-4	-6	-8
4	4	4	4	4	4	4	4
$y = x^2 - 2x + 4$	12	7	4	3	4	7	12

ويبين شكل (٢ ـ ١٠) الرسم البيانى لهاتين المعادلتين .

(ب) يتقاطع الرسمان البيانيان عند $x = -2$ و $x = +2$

ويمكن حل المعادلتين آنيا بالتعويض بقيمة $y = 8 - 2x$ من المعادلة الأولى فى المعادلة الثانية . وهذا سيعطى .

$$8 - 2x = x^2 - 2x + 4$$

وبالتالى ، فإن

$$x^2 = 4$$

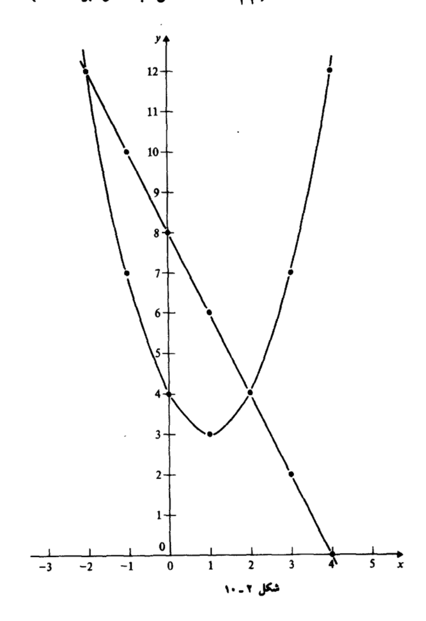
ومنها نوجد

$$x = \pm 2$$

وهذا يؤكد تقاطع المعادلتين ، كما سبق إيجاده بطريقة الرسم البيانى .

تمرين ٢ - ٣ - ٤ : عددانِ موجبان الفرق بينهما 5 ومجموع مربعيهما 193 ما هما العددان ؟

(م م ت أ - الأساس ب : نوفمبر ١٩٧٨)



شكل ٢ - ١٠

٢ - ٤ المنحنيات اللوغاريتمية والأسية

قبل ظهور الحاسبات الالكترونية كانت اللوغاريتمات وسيلة مريحة وشائعة لإجراء عمليات الضرب والقسمة المعقدة . وكانت طريقة اجراء الضرب مثلا هى إيجاد لوغاريتمات الأرقام التى يراد ضربها من الجداول ، ثم تجمع هذه اللوغاريتمات ثم يبحث عن اللوغاريتم العكسى للمجموع فى الجداول . وهكذا فإن عملية الضرب تستبدل بعملية أبسط وهى الجمع .

مثال ٢ - ٤ - ١ : أوجد حاصل الضرب 3.832×427.5 باستعمال اللوغاريتمات

الاجابة :

$$\log 3.832 = 0.5834$$

$$\log 427.5 = 2.6309$$

مجموع هذين اللوغاريتمين هو 3.2143 وبالبحث عن اللوغاريتم العكسى نجد أن

$$\text{Antilog } 3.2143 = 1638$$

وهكذا فإن هذه الطريقة تعطينا $3.832 \times 427.5 = 1638$.

والفكرة فى هذه الطريقة هى أننا عندما نبحث عن لوغاريتم أحد الأعداد فإننا فى الواقع نعبر عن الرقم بدلالة قوة لرقم متفق عليه يسمى الأساس . وأكثر الجداول الشائعة الاستخدام للحساب باللوغاريتمات تستخدم الأساس 10 ، وهذا يعنى أنه فى المثال السابق

$$427.5 = 10^{2.6309} \quad \text{و} \quad 3.832 = 10^{0.5834}$$

وبالتالى فإن

$$3.832 \times 427.5 = 10^{0.5834} \times 10^{2.6309}$$

ولما كانت القوى المختلفة لنفس العدد تضرب فى بعضها يجمع الأسس ، فإن حاصل الضرب المطلوب يكون

$$10^{(0.5834+2.6309)} = 10^{3.2143}$$

وبالمثال ، فإن قسمة عدد على عدد آخر تجرى بإيجاد الفرق بين لوغاريتميهما ثم البحث فى الجداول عن اللوغاريتم العكسى للفرق .

ومع أن الحاسبات الالكترونية الآن قد انتفت معها الحاجة إلى اللوغاريتمات لإجراء الحسابات من النوع المشار إليه أعلاه ، إلا أن مبدأ اللوغاريتم يظل هاما فى عدد من المواقف . وسنتناول واحدا من تلك المواقف فى الفصل الثالث . عندما سنستخدم قانونا للفائدة المركبة لحساب عدد الدفعات المطلوبة n (أنظر المثال ٣ - ٣ - ٤) . ويظهر المجهول n فى هذا النوع من المسائل على شكل أس لعدد ما ، ويلزم استخدام اللوغاريتمات للحصول على معادلة خطية فى n . كما سنصادف تطبيقا آخر فى الفصل السابع حيث سنشرح الرسومات البيانية نصف اللوغاريتمية كأسلوب لعرض بعض الأنواع من البيانات (انظر البند ٧ - ٣) . كما أن هناك تطبيقات أخرى فى السلاسل الزمنية حيث يمكن تحويل نموذج قائم على عملية ضرب إلى نموذج قائم على عملية جمع بواسطة اللوغاريتمات ، وفى الانحدار حيث يمكن تحويل المتغيرات المتصلة بعلاقة ضرب إلى متغيرات متصلة بعلاقة خطية بأخذ اللوغاريتم .

وسنتناول الآن مثالا يتضمن لوغاريتمات للأساس 10 ويليه تمرين للقارىء . والقواعد الأساسية فى هذا النوع من المسائل هى

$$\text{Log}(uv) = \text{Log}\, u + \text{Log}\, v$$

$$\text{Log}(u^{v}) = v\, \text{Log}\, u$$

مثال ٢ - ٤ - ٢ : إذا كان $\text{If } 11^{2x+8} = 50\,(8^{4x})$ أوجد قيمة x .

(م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٥)

الاجابة : بأخذ لوغاريتمات للطرفين نحصل على

$$(2x + 8) \log 11 = \log 50 + \log (8^{4x})$$
$$= \log 50 + 4x \log 8$$

أى أن

$$2x \log 11 + 8 \log 11 = \log 50 + 4x \log 8$$

ومنها نصل إلى

$$(2 \log 11 - 4 \log 8)x = \log 50 - 8 \log 11$$

أى أن

$$x = \frac{\log 50 - 8 \log 11}{2 \log 11 - 4 \log 8} = \frac{1.698\,97 - 8.331\,14}{2.082\,79 - 3.612\,36}$$
$$= \frac{-6.632\,17}{-1.529\,57} = 4.336$$

تمرين ٢ ـ ٤ ـ ١ : إذا كان $(0.125)^n = 0.5946$ أوجد قيمة n

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٥)

ويمكن رسم المنحنى اللوغاريتمى $y = \log x$ بنفس الطريقة التى رسمنا بها الخطوط المستقيمة ، والمنحنيات من الدرجة الثانية فى الأجزاء (٢ ـ ١) و (٢ ـ ٣) على الترتيب . وهذا يعنى اختيار مجموعة من قيم x وحساب القيم المقابلة لـ y . ثم توقيع النقط وتوصيلها بمنحنى أملس . ويلاحظ أنه لايمكن حساب $\log x$ اذا كانت x سالبة حيث أنه لايوجد أس يمكن رفع العدد 10 إليه لتكون النتيجة عددا سالبا .

ويبين شكل (٢ ـ ١١) المنحنى اللوغاريتمى $y = \log x$

واللوغاريتمات للأساس 10 هى الأكثر شيوعا ، ولها جداول متكاملة . ومع ذلك ، فإن نفس المبدأ ينطبق مهما كان أساس اللوغاريتم . وعند استخدام أساس آخر غير 10 فإن الأساس المستخدم يكتب أسفل كلمة "log" فإذا لم يكن الأساس مكتوبا ، فهذا يعنى أنه 10

مثال ٢ ـ ٤ ـ ٣ : إذا كان $\log_x 20.34 = 2$ فما هى قيمة x؟

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٤)

الاجابة : السؤال يعنى أن الأس الذى يجب رفع x إليه للحصول على 20.34 هو 2 وهكذا ، فإن

$$20.34 = x^2$$

ومنها نستنتج أن

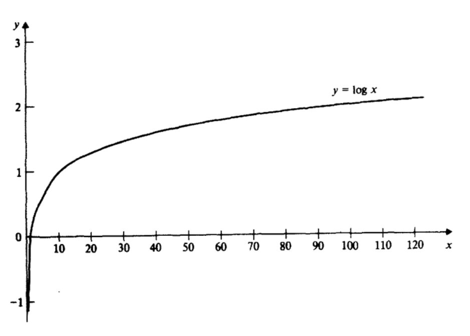
$$x = \sqrt{20.34} = 4.51$$

تمرين ٢ ـ ٤ ـ ٢ : ارسم الرسم البيانى للمعادلة $y = 2^x$ لقيم x من 4- الى 4+ ثم أوجد من الرسم البيانى

(أ) $2^{2.5}$

(ب) $\log_2 6$

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٣)



شكل ٢ ـ ١١

والأساس الوحيد للوغاريتمات الذى يشيع استخدامه بالاضافة الى الأساس 10 هو الأساس e . واستخدام هذا الرقم (وقيمته .... $e = 2.71828$) كأساس للوغاريتمات مفيد لأن له خواص معينة متعلقة بالتفاضل (أنظر الفصل الخامس) ، وكثيرا مايظهر هذا الرقم فى حلول المعادلات التفاضلية . وسنعود إليه مرة أخرى فى الفصل الثالث عشر عند الحديث عن توزيع بواسون ، والتوزيع الطبيعى للاحتمالات .

ومن الممكن الاشارة إلى اللوغاريتمات ذات الأساس e باستخدام الرمز $\log_e$ ، ولكن هذا النوع من اللوغاريتمات هام بدرجة يستحق معها رمزا خاصا ، وهو ln . وتسمى هذه اللوغاريتمات أحيانا **باللوغاريتمات الطبيعية** ، **أو اللوغاريتمات النابيرية** نسبة الى عالم الرياضة الاسكوتلندى جون نابير الذى يرجع إليه فضل اختراعها . وتسمح كثير من الحاسبات الحديثة بحساب اللوغاريتمات للأساس 10 وللأساس e .

ويوضح شكل (٢ ـ ١٢) المنحنى $y = \ln x$.

والمنحنى الأسى بالمعنى العام هو أى منحنى له معادلة فى الصورة $y = a^x$ حيث a مقدار ثابت . وهكذا ، فإن المنحنى $y = 2^x$ الذى رسمناه فى التمرين السابق هو مثال لمنحنى أسى . وكما يجب أن نكون قد لاحظنا من استخدام هذا المنحنى لحل الجزء (ب) من التمرين . فإن هذا المنحنى هو عكس منحنى اللوغاريتم للأساس 2 .

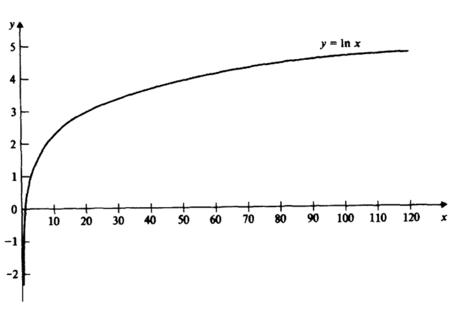
إذ أن $y = 2^x$ يعنى أن $x = \log_2 y$.

وبالتالى ، فإن الدالة الأسية هى دالة اللوغاريتم العكسى .

ولكن المصطلح « دالة أسية » يستخدم فى أغلب الحالات بمعنى محدود يشير إلى الرقم e مرفوعا إلى الأس x، أى $y = e^x$ وهذه هى دالة اللوغاريتم العكسى للوغاريتمات المأخوذة للأساس e . ويمكن إيجاد هذه الدالة من الجداول كما أنها موجودة فى كثير من الحاسبات . ويبين شكل (٢-١٣) المنحنى $y = e^x$.

يشار إلى الدالة الأسية أحيانا باعتبارها دالة النمو . وتستخدم فى وضع النماذج لتعداد السكان حيث يتناسب معدل النمو مع التعداد الحالى للسكان .

وسنصادف تطبيقا ماليا للدالة الأسية فى الجزء ٣-٣ عندما نتناول الفائدة المركبة مع استمرار التركيب .



شكل ٢-١٢

تمارين

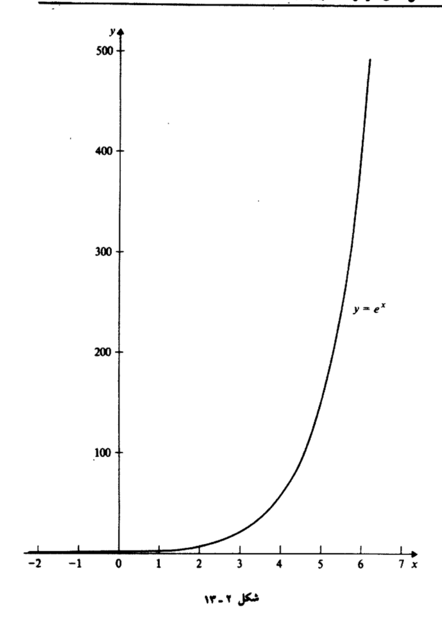
٢-١ حل المعادلات التالية

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 5$$

$$\frac{4}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 9$$

$$\frac{3}{x} - \frac{3}{y} - \frac{3}{z} = -3$$

(م م ت أ - الاساس ب نوفمبر ١٩٧٦)



شكل ٢ - ١٣

٢ - ٢ تقدر إدارة التسويق أنه اذا بيع المنتج $A1$ بسعر 40 £ للوحدة فستصل المبيعات الى 400 وحدة أسبوعيا . أما إذا بيع بسعر 20 £ للوحدة فستصل المبيعات الى 800 وحدة أسبوعيا . ويمكن اعتبار الرسم البيانى لهذه الدالة خطيا . وتقدر ادارة الانتاج أن التكاليف المتغيرة للانتاج هى 7.50 £ للوحدة ، وأن التكاليف الثابتة ستكون 000 10 £ فى الأسبوع :

(أ) استنبط معادلات التكاليف ، ودخل المبيعات والربح .

(ب) ارسم المعادلات الثلاث المستنبطة فى (أ) بيانيا .

(جـ) من الرسم البيانى قدر أقصى ربح يمكن الحصول عليه ، وأذكر عدد الوحدات المباعة ، وسعر البيع اللازم لتحقيق هذا الربح .

(م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٦)

٢ ـ ٣ : إذا كانت نسبة $x : y : 2 = 3 : -4 : 4$ وإذا كان $2x - 2y - 3zy = 8$ أوجد قيم : z,y,x

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٦)

٢ ـ ٤ (أ) ارسم المنحنى التالى بيانيا

$$y = 120x^{-0.322}$$

(الصورة العامة : $y = ax^{-b}$)

للقيم $x = 1,2,4,25,50,100,200$

(ب) اذا علم أن

y تمثل متوسط ساعات العمل المباشر لكل وحدة

a تمثل عدد ساعات العمل المباشر للوحدة الأولى

x تمثل العدد المجمع للوحدات المنتجة .

علق على الرسم البيانى ، واقترح الأحوال التى يمكن فيها الاستعانة بمثل هذا الرسم البيانى فى الادارة والمحاسبة (افترض على سبيل المثال أن الشركة تلقت طلبية لعدد من الوحدات الاضافية) .

(م م ت أ ـ المهنى ١ ـ مايو ١٩٧٩)

الفصل الثالث

الرياضة المالية

٣ ـ ١ المتواليات العددية

مبدأ المتواليات العددية مفيد لحل المسائل المالية التى تتضمن فائدة بسيطة ، أى فائدة تدفع للمستثمر بمجرد استحقاقه ولاتضاف إلى رأس المال لتربح بدورها فى المستقبل .

مثال ٣ ـ ١ ـ ١ : قرر رجل أن يدخر ماله طبقا لنظام يستثمر فيه فى البداية 4000 £ ثم يستثمر كل سنة تالية مبلغ 1000 £ إضافية . وتجرى كل الاستثمارات فى أول يناير من كل عام . وتدفع الفائدة للمستثمر فى ٣١ ديسمبر من كل عام بمعدل 12% من المبلغ المستثمر فى أول العام .

وفيما يلى بعض الأسئلة التى يمكن أن تطرح بشأن هذا الموقف :

١ ـ ماهى قيمة الفائدة التى ستدفع فى نهاية السنة الخامسة ؟
٢ ـ ماهو مجموع الفائدة المدفوعة فى السنوات السبع الأولى ؟
٣ ـ ماعدد السنوات التى يجب لهذا النظام من الاستثمار أن يستمر طوالها حتى تصبح جملة قيمة الفائدة المدفوعة 8640 £ .

ويمكن الإجابة على هذه الأسئلة كما يلى :

١ ـ قيمة الفائدة المدفوعة فى نهاية السنة الأولى هى $480\ £ = 12/100 \times 4000\ £$ وفى كل سنة تالية ستزيد الفائدة المدفوعة على الفائدة فى العام السابق بمقدار $120\ £ = 12/100 \times 1000\ £$. وهكذا فإن الفائدة المدفوعة فى نهاية العام الخامس ستكون :

$$£480 + £120 + £120 + £120 + £120 = £960$$

٢ ـ مجموع الفائدة المدفوعة فى السنوات السبع الأولى هو :

$$£480 + £600 + £720 + £840 + £960 + £1080 + £1200 = £5880$$

٣ ـ يمكن ايجاد الزمن اللازم لكى تصل جملة الفائدة المدفوعة الى 8640 £ بجمع أرقام الفائدة المتتالية الى مبلغ 5880 £ حتى نصل الى 8640 £ ،

£1320 = £120 + £1200 وبذلك بعد ٨ سنوات تكون الجملة £7200 = £1320 + £5880

£1440 = £120 + £1320 وبذلك بعد ٩ سنوات تكون الجملة £8640 = £1440 + £7200 .

وهكذا نجد أن جملة الفائدة المدفوعة ستصل الى مبلغ 8640 £ فى نهاية السنة التاسعة .

ولكن المسائل من هذا النوع يمكن أن تحل بكفاءة أكثر باستعمال مبدأ المتواليات العددية . ويمكن الحصول على متوالية عددية . متتابعة من الأعداد كل منها يختلف عن سابقة بمقدار ثابت . وعلى سبيل المثال : فان الأعداد 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2 تشكل متوالية عددية ، كما أن الأعداد التالية 74 + 79 + 84 + 89 + 94 تشكل أيضا متوالية عددية .

وكذلك ، فان جملة الفائدة المذكورة فى حل الجزء الثانى من المثال السابق وتساوى 1200 + 1080 + 960 + 840 + 720 + 600 + 480 هى ايضا متوالية عددية .

ويسمى المقدار الذى يختلف به كل حد فى المتوالية عن الحد السابق « بالفرق المشترك » ويرمز لهذا الفرق عادة بالحرف d . وهكذا ففى المثال المالى المذكور أعلاه ، فان $d = 120$ وهى الزيادة فى فائدة كل عام عن العام السابق . وفى المثالين المذكورين اعلاه لدينا $d = 3$, $d = -5$ على الترتيب .

والصورة العامة لمتوالية عددية بها n من الحدود وحدها الأول a هى

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots + [a + (n - 1)d]$$

لاحظ أن الحد الذى ترتيبه n فى المتوالية عبارة عن

$$\boxed{t_n = a + (n - 1)d}$$

ويمكن استعمال هذه المعادلة لحل السؤال (١) بالمثال الأول . وفى هذه الحالة ،فإن رقم الربح للسنة الأولى هو $a = 480$ كما أن الفرق $d = 120$ والمطلوب معرفة الربح فى السنة الخامسة ، أى عندما تكون $n = 5$. وهذا هو الحد الخامس فى المتوالية ويساوى $t_5 = 480 + (5 - 1)\,120 = 480 + 4 \times 120 = 480 + 480 = 960$ وهكذا ، فإن الربح الذى يدفع فى نهاية السنة الخامسة هو كما أوجدنا سابقا 960 £ .

والآن لنرى كيف يمكن إيجاد مجموع متواليةعددية . ويمكن استخدام قانون التجميع الناتج لحل السؤال رقم (٢) بالمثال . ولو عبرنا عن مجموع n من الحدود بالرمز S_n

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 3)d] + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 1)d] \qquad (٣-١)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة فى الصورة

$$S_n = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 3)d] + \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a \qquad (٣-٢)$$

وبجمع المعادلتين (٣-١) و (٣-٢) نحصل على

$$2S_n = [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + \ldots + [2a + (n - 1)d]$$
$$+ [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d]$$

ومنها

$$2S_n = n[2a + (n-1)d]$$

وبالتالى ، فإن

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n-1)d]}$$

وبالنسبة للجزء الثانى من المثال السابق ، فإن لدينا

$$n = 7, a = 480, d = 120$$

وبالتالى ، فإن

$$S_7 = \frac{7}{2}(2 \times 480 + 6 \times 120) = \frac{7}{2}(960 + 720) = \frac{7}{2} \times 1680$$

$$S_7 = 7 \times 840 = 5880$$

وهكذا ، فإن جملة الفائدة المدفوعة فى السنوات السبع الأول هو : 5880 £ كما سبق أن أوجدناه بالطريقة المباشرة أعلاه .

ويمكن حل السؤال الثالث باستخدام قانون المجموع لإيجاد n بمعرفة S_n , a , d

$$S_n = 8640, a = 480 \text{ and } d = 120$$

وبالتالى فان

$$8640 = \frac{n}{2}\,[2 \times 480 + (n-1) \times 120]$$

أى أن

$$8640 = n\,[480 + (n-1) \times 60]$$

$$8640 = n\,(420 + 60n)$$

$$144 = n\,(7 + n)$$

ومنها نصل إلى :

$$n^2 + 7n - 144 = 0$$

وهذه المعادلة من الدرجة الثانية ، وقد شرحنا طريقة حلها فى الجزء (٢ ـ ٣) . وحلا هذه المعادلة بالذات هما : $n = 9$, $n = -16$ والحل السالب لامعنى له بالنسبة لهذه المسألة . أما الحل $n = 9$ فيعنى أن جملة الفائدة المدفوعة سوف يصل الى 8640 £ فى نهاية العام التاسع ، كما سبق أن أوجدناه .

وفيما يلى بعض الأمثلة التى تستخدم قانونى المتواليات العددية بطرق مختلفة ويليها عدد من التمارين للقارىء .

مثال ٣ ـ ١ ـ ٢ : ماهو الحد العاشر للمتوالية العددية التالية

$$30 + 39 + 48 + \ldots ?$$

الاجابة : الفرق المشترك هو $d = 39 - 30 = 9$

وبذلك ، فان الحد العاشر يساوى

$$t_{10} = 30 + (10 - 1) \times 9 = 30 + 9 \times 9 = 30 + 81 = 111$$

مثال ٣ ـ ١ ـ ٣ : أوجد مجموع المتوالية العددية الآتية حتى 12 حدا

$$6 + 21 + 36 + \ldots$$

الاجابة : الفرق المشترك هو $d = 21 - 6 = 15$
وهكذا ، فان مجموع المتوالية حتى 12 حدا يساوى

$$S_{12} = \frac{12}{2}(2 \times 6 + 11 \times 15) = 6 \times (12 + 165) = 6 \times 177 = 1062$$

مثال ٣ ـ ١ ـ ٤ : أوجد مجموع الأعداد الفردية الواقعة بين 50 , 20

الإجابة : البيانات المعطاه تدل على أن $a = 21$, $d = 2$ والحد الأخير هو 49

وفى البداية يجب أن نحدد عدد الحدود باستخدام قانون الحد الذى ترتيبه n

$$t_n = a + (n - 1)d$$

وبالتالى فان :
$$49 = 21 + (n - 1) \times 2$$
$$28 = 2 \times (n - 1)$$

اذن :
$$n - 1 = 14$$

ومنها نرى أن عدد الحدود $n = 15$
وبالتالى نستطيع أن نوجد المجموع المطلوب

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2 \times 21 + 14 \times 2) = 15 \times (21 + 14) = 525$$

مثال ٣ ـ ١ ـ ٥ : أوجد الحد الأخير فى متوالية عددية عدد حدودها 5 إذا كان الحد الأول 30 ومجموع المتوالية 310 .

الاجابة : المعلومات المعطاه هى أن $a = 30$ ، $n = 5$ والمجموع $S_5 = 310$ وفى البداية نستخدم قانون المجموع لنوجد الفرق المشترك d .

$$310 = \frac{5}{2}(2 \times 30 + 4 \times d)$$

أى أن :
$$310 = 5(30 + 2d)$$

ومنها نحصل على :
$$30 + 2d = 62$$

وبالتالى نستنتج أن $2d = 32$ ، أى أن $d = 16$
وهكذا ، فان الحد الأخير

$$t_5 = 30 + 4 \times 16 = 30 + 64 = 94$$

مثال ٣ ـ ١ ـ ٦ : تحتفظ شركة بمبلغ 100 £ من أباحها فى الشهر الأول ، وبمبلغ 120 £ فى الشهر الثانى ، وتستمر فى زيادة المبلغ الذى تحتفظ به بمقدار 20 £ كل شهر لمدة 36 شهرا . استخدم قانون المجموع لحساب اجمالى المبلغ الذى سيتجمع لدى الشركة فى نهاية 36 شهرا .

الاجابة :

$$S_{36} = \frac{36}{2}(2 \times 100 + 35 \times 20) = 18(200 + 700) = 18 \times 900$$

وبالتالى ، فان المبلغ الذى سيتجمع فى نهاية 36 شهرا هو 200 16 £ .

مثال ٣ ـ ١ ـ ٧ : حصل رجل على وظيفة بداية مربوطها 5000 £ ومقدار العلاوة السنوية 250 £ فاذا افترضنا ثبات هذه الأرقام أوجد مايلى :

١ ـ المرتب فى السنة السادسة
٢ ـ اجمالى المرتب الذى يحصل عليه الرجل فى السنوات الثمانى الأولى قبل الاستقطاعات

الاجابة :

١ ـ 1. $t_6 = 5000 + 5 \times 250 = 5000 + 1250 = 6250$

أى أن المرتب فى السنة السادسة يساوى 6250 £ .

٢ ـ 2. $S_8 = \frac{8}{2}(2 \times 5000 + 7 \times 250) = 4(10\,000 + 1750) = 47000$

أى أن اجمالى المرتب الذى سيحصل عليه الرجل فى السنوات الثمانى الأولى يساوى قبل الاستقطاعات 000 47 £

تمرين ٣ ـ ١ ـ ١ : ماهو الحد السادس عشر من المتوالية العددية .

$$40 + 38 + 36 + 34 + \ldots ?$$

تمرين ٣ ـ ١ ـ ٢ : أوجد مجموع المتوالية العددية الآتية حتى 20 حدا .

$$13 + 18 + 23 + 28 + \ldots$$

تمرين ٣ ـ ١ ـ ٣ : اذا كان الحد الأول من متوالية عددية هو 12 ومجموعها حتى 10 حدود هو 300 أوجد مجموع المتوالية حتى 18 حدا .

تمرين ٣ ـ ١ ـ ٤ : فى أول يناير كان جون سميث مدينا بمبلغ 000 12 £ . وتخفيض المديونية وافق على أن يدفع مبلغ 1200 £ فى نهاية كل ستة شهور مضافا اليها فائدة قدرها 2½% على مبلغ الدين الباقى فى بداية فترة الستة شهور . فاذا كان قانون مجموع المتوالية العددية ينص على أن

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

استخدم هذا القانون لايجاد اجمالى الفائدة التى سيدفعها .

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٢)

٣ ـ ٢ المتواليات الهندسية

المتواليات الهندسية ذات أهمية كبرى لمجال عريض من المسائل المالية التى تتضمن فكرة الفائدة المركبة ، أى الفائدة التى تضاف الى رأس المال لتربح بدورها فى المستقبل . وفى هذا الجزء سنتناول المتواليات الهندسية بصفة عامة ، وفى الأجزاء التالية من الفصل سنتناول الفائدة المركبة والتطبيقات المالية لفكرة المتواليات الهندسية .

نحصل على متوالية هندسية باضافة متتابعة من الأعداد كل منها عبارة عن مضاعف ثابت لسابقة . وهكذا فان الأعداد 224 + 112 + 56 + + 28 + 14 + 7 تشكل متوالية هندسية والأعداد 1 + 3 - 9 + 27 - 81 تشكل متوالية هندسية .

والعامل الذى يضرب فى كل عدد للحصول على العدد التالى يسمى « بالنسبة المشتركة » للمتوالية . وسنرمز لهذه النسبة k . وهكذا فإنه فى المثال الأول أعلاه كانت $k = 2$ أما فى المثال الثانى ، فإن $k = -1/3$

وفيما يلى الصورة العامة لمتوالية هندسية بها n من الحدود والحد الأول منها هو a .

$$a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^{n-1}$$

لاحظ أن الحد الذى ترتيبة n بالمتوالية

$$\boxed{t_n = ak^{n-1}}$$

وفى المثالين الواردين أعلاه ، فإن الحد الخامس من المتوالية الأولى يساوى

$$t_5 = 7 \cdot 2^4 = 7 \cdot 16 = 112$$

أما الحد الرابع من المتوالية الثانية فيساوى

$$t_4 = 81\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = 81\left(-\frac{1}{27}\right) = -3$$

والآن سنرمز لمجموع n من الحدود من المتوالية الهندسية العامة بالرمز S_n . ويمكن إيجاد هذا المجموع كما يلى :

$$S_n = a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^{n-2} + ak^{n-1} \quad (٣-١)$$

وبضرب طرفى هذه المعادلة فى k نحصل على

(٣ - ٢) $$kS_n = ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^{n-2} + ak^{n-1} + ak^n$$

ويطرح (٣ - ١) من (٣ - ٢) $$(k-1)S_n = ak^n - a$$

وبالتالى ، فإن $$(k-1)S_n = a(k^n - 1)$$

ومنها نوجد

$$\boxed{S_n = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1}}$$

وبالنسبة للمثال الأول أعلاه يكون لدينا

$$n = 6, a = 7, k = 2$$

وبالتالى ، فإن

$$S_6 = \frac{7\,(2^6 - 1)}{2 - 1} = \frac{7\,(64 - 1)}{1}$$
$$= 7 \times 63 = 441$$

وبالنسبة للمثال الثانى لدينا

$$n = 5, a = 81, k = -\frac{1}{3}$$

وبالتالى ، فإن

$$S_5 = \frac{81\,[(-1/3)^5 - 1]}{(-1/3) - 1} = \frac{81(-1/243 - 1)}{-4/3} = 81 \times \left(-\frac{244}{243}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = 61$$

ويمكن للقارىء مراجعة هاتين النتيجتين بالجمع المباشر . وفيما يلى بعض الأمثلة التى تستخدم قانونى المتواليات الهندسية بطرق مختلفة ، ثم بعض التمارين للقارىء .

مثال ٣ - ٢ - ١ : إذا كان الحد الثانى بمتوالية هندسية 24 وحدها الخامس 81 أوجد مجموع الحدود الأربعة الأولى .

الاجابة :

$$t_2 = ak^{2-1} = ak = 24$$
$$t_5 = ak^{5-1} = ak^4 = 81$$

إذن

$$\frac{ak^4}{ak} = \frac{81}{24} = \frac{27}{8}$$

وبالاختصار نحصل على $k^3 = 27/8$ أى أن $k = 3/2$ ، ومنها نوجد

$$a = \frac{24}{3/2} = 16$$

وبالتالى ، فان مجموع الحدود الأربعة الأولى هو :

$$S_4 = \frac{a(k^4 - 1)}{k - 1} = \frac{16[(3/2)^4 - 1]}{3/2 - 1} = \frac{16(65/16)}{(1/2)}$$

أى أن مجموع الحدود الأربعة الأولى يساوى 130 .

مثال ٣ - ٢ - ٢ : الحد الأول من متوالية هندسية هو 6 والحد الرابع 48 أوجد مجموع المتوالية لتسعة حدود .

الاجابة :

$$a = 6 \text{ و } t_4 = ak^{4-1} = ak^3 = 48$$

ومنها نوجد $k^3 = 48/6 = 8$ أى أن $k = 2$

وبالتالى ، فإن مجموع تسعة حدود هو

$$S_9 = \frac{6(2^9 - 1)}{2 - 1} = \frac{6 \times 511}{1} = 3066$$

مثال ٣ - ٢ - ٣ : فى احدى المتواليات الهندسية يزيد الحد الثانى على الحد الأول بمقدار 6 ويزيد الحد الثالث على الثانى بمقدار 9 أوجد مجموع المتوالية لخمسة حدود .

الاجابة :

$$t_2 - t_1 = ak - a = 6$$
$$t_3 - t_2 = ak^2 - ak = 9$$

وبالقسمة نحصل على

$$\frac{a(k - 1)}{ak(k - 1)} = \frac{6}{9}$$

وبالتالى ، فإن $6k = 9$ أى أن $k = 3/2$ ، كما أن

$$a = \frac{6}{3/2 - 1} = \frac{6}{1/2} = 12$$

وبالتالى ، فإن المجموع لخمسة حدود هو

$$S_5 = \frac{12[(3/2)^5 - 1]}{3/2 - 1} = \frac{12(211/32)}{1/2} = \frac{12 \times 211}{16} = 158\tfrac{1}{4}$$

تمرين ٣-٢-١ : احسب الحد العاشر ومجموع التسعة حدود الأولى بالمتوالية

$4 - 6 + 9 \ldots$ (م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٧)

تمرين ٣-٢-٢ : أوجد مجموع المتوالية الهندسية التالية لاثنى عشر حدا

$$3 + 6 + 12 + 24 + \ldots$$

تمرين ٣-٢-٣ : متوالية هندسية مكونة من خمسة حدود الحد الثانى منها 4/9 والحد الأخير 32/243 أوجد مجموعها .

تمرين ٣-٢-٤ : أوجد الحدود الناقصة فى المتوالية الهندسية الآتية :

$$125 + \ldots + \ldots + 27$$

تمرين ٣-٢-٥ : متواليةهندسية حدها الأول 11 وحدها الأخير 264 11 والنسبة المشتركة 2 كم عدد حدودها ؟

٣-٣ الفائدة المركبة

لتوضيح الفكرة الأساسية للفائدة المركبة سنبدأ بالمثال التالى :

مثال ٣-٣-١ : إذا استثمر مبلغ قدره500 8 £ لمدة 12 عاما بفائدة مركبة معدلها 10% فى السنة فما هو جملة المبلغ المتجمع فى نهاية المدة ؟

(م م ت أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٣)

الاجابة : الفائدة الناتجة فى نهاية العام الأول هى 10/100 × 8500 £ وهكذا ، فان رأس المال فى بداية العام الثانى يتكون من المبلغ الأصلى زائدا الفائدة

$$£8500 + £8500 \times \frac{10}{100} = £8500 \left(1 + \frac{10}{100}\right)$$

وخلال السنة الثانية ، فان هذا المبلغ يربح المقدار التالى

$$£8500 \left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \frac{10}{100}$$

وهكذا ، فان رأس المال فى بداية العام الثالث يكون :

$$£8500 \left(1 + \frac{10}{100}\right) + £8500 \left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \frac{10}{100} = £8500 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$$

وبنفس الطريقة نجد أنه فى نهاية العام الثالث يكون رأس المال بعد اضافة الفائدة اليه مساويا $£\ 8500(1 + 10/100)^3$.

وبمواصلة الحساب بهذه الطريقة نجد أن المبلغ المطلوب حسابه فى نهاية السنة 12

$$£8500\left(1+\frac{10}{100}\right)^{12}$$

وهذا المبلغ يساوى

$$£8500 \times (1.1)^{12} = £8500 \times 3.1384 = £26\ 677$$

ولنأخذ بصفة عامة أصلا ابتدائيا قدره P_0 يستثمر لمدة n من السنوات بمعدل فائدة قدرة $r\%$ سنويا ، وباستخدام نفس المنطق المطبق فى المثال أعلاه نجد أن الأصل يصبح فى نهاية العام الأول .

$$P_1 = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

وبعد سنتين يكون الأصل $P_2 = P_0(1 + r/100)^2$.

وبمواصلة الحساب بنفس الطريقة نجد أن رأس المال المتجمع بعد n من السنوات

$$\boxed{P_n = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$$

مثال ٣ ـ ٣ ـ٢ : إذا كانت قيم العقارات تتزايد بمعدل 7% سنويا ، فما قيمة العقار الذى تم شراؤه الآن بمبلغ 000 20 £ بعد 15 عاما ؟

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٥)

الاجابة

$$P_0 = £20\ 000, r = 7, n = 15$$

وبالتالى ، فان قيمة العقار بعد 15 عاما ستكون :

$$P_{15} = £20\ 000\left(1+\frac{7}{100}\right)^{15} = £20\ 000 \times (1.07)^{15}$$

$$= £20\ 000 \times 2.759 = £55\ 181$$

تمرين ٣ ـ ٣ ـ١ : اذا أهملنا الضرائب فما هو معدل الفائدة المركبة الذى يجب أن يستثمر به مبلغ 1000 £ حتى يتجمع مبلغ 2261 £ بعد عشر سنوات ؟

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٤)

ويمكن تطبيق المتواليات الهندسية اذا كان لدينا موقف يتعلق بالفائدة المركبة به أصل P_0 يستثمر بفائدة ، وبالاضافة الى ذلك ، فإن هناك مبالغ اضافية ثابتة x تضاف الى الأصل كل عام بعد نهاية العام الأول .

وسنشير الى هذا الموقف باسم « فائدة مركبة مع أقساط » . وسنرى أن هذه الفكرة غاية فى الأهمية .
وسيكون الأصل فى نهاية السنة الأولى بعد استحقاق الفائدة وبعد دفع القسط الاستثمارى ، كما يلى :

$$P_1 = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)+x$$

وبالمثل فعند نهاية السنة الثانية سيكون الأصل

$$P_2 = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 + x\left(1+\frac{r}{100}\right)+x = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 + x + x\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

وفى نهاية السنة الثالثة سيكون

$$P_3 = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^3 + x\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 + x\left(1+\frac{r}{100}\right)+x$$

$$= P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^3 + x + x\left(1+\frac{r}{100}\right) + x\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

وبمواصلة الحساب بهذه الطريقة نجد فى نهاية العام n

$$P_n = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^n + x + x\left(1+\frac{r}{100}\right) + x\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 + \ldots + x\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}$$

وتشكل مجموعة الحدود المقابلة للأقساط الاستثمارية متوالية هندسية عدد حدودها n والحد الأول منها $a = x$ والنسبة المشتركة لها

$$k = 1+\frac{r}{100}$$

وهكذا فباستعمال القانون الوارد بالبند ٣ ـ ٢ لمجموع المتوالية الهندسية نحصل على قيمة الأصل بعد القسط فى نهاية العام n كما يلى :

$$P_n = P_0(1+r/100)^n + \frac{x[(1+r/100)^n - 1]}{(1+r/100)-1}$$

ومنها نحصل على قانون هام جدا هو

$$\boxed{P_n = P_0(1+r/100)^n + \frac{x[(1+r/100)^n - 1]}{r/100}}$$

ويمكن بالاستخدام الصحيح لهذا القانون حل مجموعة كبيرة من مسائل الرياضة المالية . ونلاحظ أن القانون الأساسى للفائدة المركبة هو حالة خاصة من هذا القانون عندما تكون $x = 0$.

أرصدة الاحلال : أول تطبيق سنتناوله هو المبالغ المجنبة للاحلال . وطبقا لهذا النظام ، فإن الشركة تقرر تجنيب مبلغ

ثابت على فترات منتظمة بهدف استخدامه لاحلال معدات جديدة بدل المستهلكة . ويمكن اعتبار هذه الحالة كحالة خاصة من المذكور أعلاه حيث يساوى الاستثمار الأول P_0 الأقساط الاستثمارية التالية x .

وهكذا ، فإن قيمة المبلغ المجنب للاحلال ستصل بعد n من السنوات وبمعدل فائدة r% سنويا الى

$$x(1 + r/100)^n + \frac{x[(1 + r/100)^n - 1]}{r/100}$$

ويمكن تبسيط هذه المعادلة بحيث تعطى النتيجة التالية للمبلغ المجنب للاحلال فى نهاية السنة n وبعد دفع القسط .

$$= \frac{x[(1 + r/100)^{n+1} - 1]}{r/100}$$

مثال ٣ ـ ٣ ـ ٣ : يتم تجميع مبلغ للاحلال باستثمار 500 £ كل سنة لمدة عشرين سنة بمعدل فائدة 9% سنويا . وتسدد الدفعة الأولى فورا ، والأخيرة فى نهاية العام العشرين . أوجد القيمة النهائية للمبلغ المجنب للاحلال .

الاجابة :

$$n = 20, r = 9, x = £500$$

ومنها نوجد القيمة النهائية

$$= \frac{£500(1.09^{21} - 1)}{0.09} = \frac{£50\,000}{9}(6.1088 - 1) = £28\,382$$

تمرين ٣ ـ ٣ ـ ٢ : يتم تجميع مبلغ للاحلال باستثمار 700 £ سنويا بمعدل فائدة 11% . أوجد عدد السنوات اللازمة لتجميع 000 30 £ .

الدفعات المتساوية : التطبيق الثانى لقانون الفائدة المركبة مع أقساط هو على مسائل الدفعات المتساوية . وهنا فإن P_0 تمثل استثمارا أوليا سالبا لأنها عبارة عن جملة المبلغ المقترض (وعلى سبيل المثال الرهن) أما x فهى قيمة الدفعات المتساوية تسديداً للقرض . أما P_n فهى تساوى صفرا لأن الدفعات يجب أن تعادل بالضبط المبلغ المقترض أولا . ويمكن استخدام القانون لحساب حجم الدفعات لتسديد القرض فى عدد معين من السنوات ، أو عدد السنين اللازمة لتسديد القرض بحجم دفعات معين .

مثال ٣ ـ ٣ ـ ٤ :

(أ) تعرض شركة تأجير ماكينة قيمتها 5000 £ لمدة 15 عاما . وعلى المستأجر أن يدفع أقساطا سنوية متساوية عددها 15 قسطا . وتدفع الأقساط فى نهاية كل عام وتتضمن سدادا لجزء من الدين مع فائدة بمعدل% 10على الدين المتبقى فى بداية العام . احسب قيمة الأقساط السنوية .

(ب) اذا كانت الأقساط المذكورة فى (أ) أعلاه بقيمة 600 £ ما عدد السنوات التى يجب أن يستمر فيها دفع الأقساط حتى ينتهى العميل من دفع ثمن الماكينة بالاضافة الى فائدة معدلها 10% سنويا ؟

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٥)

الاجابة

(أ) $$P_0 = -5000, P_n = 0, n = 15, r = 10$$

وبالتالى ، فإن

$$0 = -5000(1 + 10/100)^{15} + \frac{x[(1 + 10/100)^{15} - 1]}{10/100}$$

ومنها

$$5000(1.1)^{15} = \frac{x[(1.1)^{15} - 1]}{0.1}$$

وبالتالى ، فإن

$$x = \frac{500(1.1)^{15}}{(1.1)^{15} - 1} = \frac{500 \times 4.1772}{4.1772 - 1} = \frac{500 \times 4.1772}{3.1772} = 657$$

أى أن القسط السنوى المطلوب هو 657 £

(ب) $$P_0 = -5000, P_n = 0, x = 600, r = 10$$

$$0 = -5000(1.1)^n + \frac{600[(1.1)^n - 1]}{0.1}$$

أى أن

$$0 = -5000(1.1)^n + 6000(1.1)^n - 6000$$

ومنها

$$1000(1.1)^n = 6000$$

أى أن

$$(1.1)^n = 6$$

وبأخذ لوغاريتمات للطرفين

$$n \log 1.1 = \log 6$$

ومنها نوجد

$$n = \frac{\log 6}{\log 1.1} = \frac{0.778}{0.041} \frac{15}{39} = 18.8$$

أى أنه يلزم 19 عاما لاستكمال السداد على دفعات قدرها 600 £ سنويا .

تمرين ٣ ـ ٣ ـ ٣ : يجرى التفاوض مع احدى شركات التمويل على قرض مقداره 000 15 £ لتمويل شراء عقار ثمنه 000 20 £ وسيمول المبلغ الباقى وقدره 000 5 £ من الموارد الذاتية . وشروط القرض كما يلى :

معدل الفائدة ثابت وقدرة 10% سنويا على مدى السنوات الخمسة عشرة . وتحسب الفائدة السنوية على المبلغ المتبقى من القرض فى بداية كل عام .

يتم السداد على 15 قسطا سنويا متساويا . ويشمل كل قسط الاصل والفائدة .

والمطلوب حساب مبلغ القسط الذى يدفع سنويا لسداد القرض الذى قيمته 000 15 £ .

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٥)

تمرين ٣ ـ ٣ ـ ٤ : بالنسبة للتمرين ٣ ـ ٣ ـ ٣ احسب عدد الأقساط اللازمة اذا كانت قيمة القسط 2100 £ .

استهلاك الأصول الثابتة : والآن سنتناول طريقة النسبة الثابتة لحساب استهلاك الأصول الثابتة . وهذه الطريقة تطبيق للقانون الأساسى للفائدة المركبة (أى الحالة عندما تكون $x = 0$) مع كون معدل النمو سالبا . وهكذا فبدلا من أن يكون لدينا أصل ينمو بنسبة ثابتة سنويا ، فإن لدينا أصلا ثابتا (ماكينة أو موجودات) تتناقص قيمته بنسبة ثابتة سنويا . فاذا رمزنا لنسبة الاستهلاك الثابتة بالرمز $r\%$ سنويا ، وباستخدام نفس المنطق المطبق فى حالة الفائدة المركبة ، فإن قيمة الأصل P_n بعد مرور n من السنوات تكون

$$P_n = P_0\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$$

حيث P_0 ـ القيمة الابتدائية للأصل .

مثال ٣ ـ ٣ ـ ٥ : أصل ثابت قيمته 000 40 £ وينتظر أن يكون عمره النآفع 20 سنة وأن يكون ثمن بيعه بعد ذلك كخردة 4000 £ فاذا استخدمت طريقة النسبة الثابتة للاستهلاك ، أوجد معدل الاستهلاك السنوى .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٧٦)

الاجابة

$$P_0 = 40\,000, P_n = 4000, n = 20$$

وبالتالى ، فإن

$$4000 = 40\,000\left(1 - \frac{r}{100}\right)^{20}$$

ومنها

$$\left(1 - \frac{r}{100}\right)^{20} = 0.1$$

$$1 - \frac{r}{100} = (0.1)^{1/20} = 0.891$$

أى أن

$$\frac{r}{100} = 1 - 0.891 = 0.109$$

ومنها نوجد

$$r = 10.9$$

أى أن المعدل السنوى لاستهلاك الأصل هو 10.9% .

مثال ٣ ـ ٣ ـ ٦ : بالنسبة للمثال السابق ٣ ـ ٣ ـ ٥ احسب القيمة الدفترية للأصل بعد 15 عاما .

الاجابة

$$P_{15} = 40\,000 \left(1 - \frac{10.9}{100}\right)^{15} = 40\,000\,(0.891)^{15}$$

$$= 40\,000 \times 0.177 = 7083$$

أى أن القيمة الدفترية للأصل بعد 15 عاما هى 7083 £

تمرين ٣ ـ ٣ ـ ٥ : ماكينة ثمنها 650 25 £ تستهلك حتى تصل قيمتها كخردة الى 500 £ بعد عشر سنوات ، والمطلوب حساب مايلى :

١ ـ المعدل السنوى للاستهلاك باستخدام طريقة النسبة الثابتة .

٢ ـ القيمة الدفترية فى نهاية العام السادس .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٧)

الفائدة المركبة مع التركيب المستمر من التطبيقات المالية المباشرة للدالة الأسية $y = e^x$ التى درسناها فى البند ٢ ـ ٤ حالة الفائدة المركبة التى تضاف فيها الفائدة الى الأصل ليس سنويا ، ولا كل ثلاثة شهور ، أو كل شهر وإنما باستمرار .

وهذه هى الحالة الحدية لإضافة الفائدة ، وتمثل أسرع معدل ممكن لنمو الأصل لمعدل ثابت للفائدة المركبة . وقانون الفائدة المركبة لهذه الحالة الحدية :

$$P_n = P_0 e^{rn/100}$$

حيث $r\%$ المعدل السنوى للفائدة .

مثال ٣ ـ ٣ ـ ٧ : استثمر مبلغ 7000 £ بفائدة مركبة بمعدل 12% سنويا . أوجد جملة المبلغ فى نهاية السنة الخامسة إذا كانت الفائدة المركبة تضاف للأصل : (أ) سنويا (ب) كل شهر (جـ) باستمرار .

الاجابة :

(أ) $$P_5 = P_0 \left(1 + \frac{12}{100}\right)^5 = £7000\,(1.12)^5 = £12\,336$$

(ب) $$P_5 = P_0 \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{60}$$

ولما كانت 12% سنويا تدفع كل شهر تعنى 1% شهريا ، فإن

$$P_5 = £7000 \times (1.01)^{60} = £12\,717$$

(جـ) $P_5 = P_0 e^{rn/100} = £7000e^{12 \cdot 5/100} = £7000e^{0.6} = £12\ 755$

تمرين ٣ ـ ٣ ـ ٦ : موجودات قيمتها الأصلية 8500 £ يتم استهلاكها بطريقة النسبة الثابتة بمعدل فائدة 10% سنويا أوجد مايلى :

١ ـ القيمة الدفترية لها بعد ست سنوات إذا كان الاستهلاك يتم سنويا .
٢ ـ القيمة الدفترية بعد ست سنوات اذا كان الاستهلاك يتم باستمرار .
٣ ـ الزمن اللازم لوصول القيمة الدفترية إلى 5000 £ إذا كان الاستهلاك يتم باستمرار .

٣ ـ ٤ القيمة الحالية :

هذا الموضوع تطبيق آخر للقوانين الأساسية للفائدة المركبة ، والفائدة المركبة مع أقساط . وسنتناول هذا الموضوع أولا من وجهة نظر القانون الأساسى للفائدة المركبة ، ثم سنتوسع فى دراسته ليشمل حالة الفائدة المركبة مع أقساط .

وكل المطلوب حسابيا لايجاد القيمة الحالية هو إعادة ترتيب قانون الفائدة المركبة لنحصل على معادلة تعطى P_0 أى اعادة كتابة القانون $P_n = P_0(1 + r/100)^n$ بحيث نحصل على $P_0 = P_n(1 + r/100)^{-n}$.

وهذا يعنى ايجاد المبلغ الذى اذا استثمرناه الآن بمعدل فائدة مركبة $r\%$ سيعطى مبلغا اجماليا قدره P_0 بعد مرور n من السنوات . وهذه الحالة مهمة لدرجة أن هناك جداول « لعوامل القيمة الحالية » $(1 + r/100)^{-n}$ تعد وتنشر للقيم المختلفة لكل من r , n والقيمة الحالية هى أساس فكرة الخصم التى سندرسها فى الجزء ٣ ـ ٥ .

مثال ٣ ـ ٤ ـ ١ : احسب القيمة الحالية بمبلغ 000 50 £ يلزم دفعها بعد 20 عاما بافتراض أن معدل الفائدة هو $7\frac{1}{2}\%$.

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٤)

الاجابة :

$$P_n = £50\ 000,\ n = 20,\ r = 7.5$$

$$P_0 = £50\ 000 \left(1 + \frac{7.5}{100}\right)^{-20} = £50\ 000 \times (1.075)^{-20}$$

$$= £50\ 000 \times 0.2354 = £11\ 771$$

تمرين ٣ ـ ٤ ـ ١ : احسب القيمة الحالية بمبلغ 1 £ يجب دفعه :
(١) بعد عشر سنوات بمعدل فائدة 3%
(٢) بعد خمس سنوات بمعدل فائدة 6%

(م م ت ـ أ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٢)

وبمتابعة موضوع القيمة الحالية مع فائدة مركبة وأقساط نصل الى فكرة الدفعات السنوية المتساوية (annuities) وهذا الموضوع يعنى دفع مبلغ ثابت الآن مقابل الحصول على دخل سنوى منتظم لعدد محدد من السنوات فى المستقبل . ويكون مقدار الدخل السنوى محددا ، والمطلوب تحديد مجموع القيم الحالية لتلك المبالغ .

ويمكن حل هذه المسألة باستخدام قانون الفائدة المركبة مع أقساط بأخذ $P_n = 0$ حيث أن قيمة الدخل السنوى ستكون صفرا بعد دفع آخر دفعة .

$A = x$ - هو المبلغ الذى سيدفع كل عام و P_0 هى القيمة الحالية المطلوبة بتعويض هذين الرقمين فى القانون.

$$0 = P_0(1 + r/100)^n - \frac{A[(1 + r/100)^n - 1]}{r/100}$$

وبحل المعادلة لإيجاد P_0

$$P_0 = \frac{A[1 - (1 + r/100)^{-n}]}{r/100}$$

وهذا القانون هام جدا ، وهناك جداول منشورة لقيمة معامل الدفعات السنوية المتساوية

$$\frac{[1 - (1 + r/100)^{-n}]}{r/100}$$

لقيم مختلفةٌ لكل من r , n .

مثال ٣ - ٤ - ٢ : ماهو المبلغ اللازم حاليا لشراء دخل سنوى ثابت قدرة 1200 £ (قبل استقطاع الضرائب) يدفع على أقساط كل ثلاثة أشهر لمدة 12 عاما إذا كان معدل الفائدة % $2\frac{1}{2}$ لكل ثلاثة أشهر ؟ علما بأن الدفعة الأولى تدفع بعد مرور ثلاثة أشهر على الشراء .

(م م ت أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٣)

الاجابة : الدفعات المتساوية كل ثلاثة أشهر $A = \frac{£1200}{4} = £300$. وعدد الفترات التى طولها ثلاثة أشهر $n = 48$ ومعدل الفائدة $r = 2.5$ وبالتالى ، فإن :

$$P_0 = \frac{300[1 - (1 + 2.5/100)^{-48}]}{2.5/100} = \frac{300[1 - (1.025)^{-48}]}{0.025}$$

$$P_0 = £8332$$

أى أن القيمة الحالية للدخل السنوى هى : 8332 £ .

تمرين ٣ - ٤ - ٢ : ينتظر أن يدر منجم دخلا سنويا صافيا (أى بعد خصم تكاليف التشغيل) قدره 000 50 £ لمدة 15 سنة قادمة ، وفى نهاية تلك المدة لن تكون للمنجم أية قيمة . احسب ثمن شراء المنجم ليدر ربحا قدره 12% سنويا .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٧)

٣ - ٥ الخصم

الخصم عبارة عن تعميم لفكرة الدفعات السنوية المتساوية لحساب القيمة الحالية لعدد من المبالغ التى ستدفع فى أوقات مختلفة فى المستقبل . وفى هذه الحالة ، فإن الدفعات غير متساوية ، وليست منتظمة فى مواعيدها بالضرورة . ونظرا لأن هذين الشرطين غير محققين فإن المتواليات الهندسية لايمكن استخدامها للحصول على معادلة سهلة لاجمالى القيمة الحالية . لذا يلزم حساب القيمة الحالية لكل من المبالغ ثم جمعها معا . ومن المفيد استخدام جداول القيم الحالية لحساب القيم الحالية لكل مبلغ .

والخصم من الموضوعات البالغة الأهمية لتقييم الاستثمارات ، خاصة عندما يكون معدل الفائدة مرتفعا . وتتوقف القيمة الحقيقية لأى مبلغ من المال على الموعد الذى سيكون متاحا فيه .

مثال ٣ ـ ٥ ـ ١ : يقدر أن الاستثمار فى عملية جديدة سيؤدى إلى تدفق الأموال على النحو الموضح بالجدول التالى :

		المبالغ الصافية	
		ايرادات (£)	مصروفات (£)
الآن		–	60 000
فى نهاية العام	1	–	10 000
	2	15 000	–
	3	20 000	–
	4	20 000	–
	5	20 000	–
	6	20 000	–

وتريد الشركة أن يكون ربحها من مثل هذه العمليات 15% على الأقل سنويا . احسب القيم الحالية للايرادات والمصروفات المنتظرة ، وعلق على القرار الذى يجب اتخاذه .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٧٦)

الاجابة : القيمة الحالية للمصروفات تحسب كما يلى :

$$= £60\,000 + £10\,000\left(1 + \frac{15}{100}\right)^{-1}$$

$$= £60\,000 + £10\,000(1.15)^{-1}$$

$$= £60\,000 + £8696 = £68\,696$$

والقيمة الحالية للايرادات تحسب كما يلى :

$$= £15\,000(1.15)^{-2} + £20\,000(1.15)^{-3} + £20\,000(1.15)^{-4} + £20\,000(1.15)^{-5} + £20\,000(1.15)^{-6}$$

$$= £11\,342 + £13\,150 + £11\,435 + £9943 + £8647 = £54\,517$$

وحيث أن القيمة الحالية للمصروفات المنتظرة تتجاوز بكثير القيمة الحالية للإيرادات المنتظرة ، فإن الاستثمار فى هذه العملية لايبدو مفيداً .

تمرين ٣ ـ ٥ ـ ١ : تفكر شركة فى شراء جهاز ثمنة 000 120 £ وينتظر أن تعطى الدخل التالى فى نهاية كل عام .

العام	الدخل الصافى (£)
1	30 000
2	45 000
3	40 000
4	35 000
5	20 000

وتبلغ قيمة الجهاز فى نهاية العام الخامس 7000 £ فاذا افترضنا معدل فائدة قدرة 9% سنويا فهل من المربح شراء هذا الجهاز ؟

وهناك حالات نصادفها فى حسابات الخصم يكون المطلوب فيها ليس حساب القيمة الحالية على أساس معدل معلوم للفائدة r وإنما بالعكس حساب معدل الفائدة الذى يعطى للاستثمار قيمة حالية أجمالية مساوية للصفر . ويسمى معدل الفائدة فى هذه الحالة « بمعدل العائد الداخلى » ولايوصى بالاقدام على مثل هذا الاستثمار الا اذا كانت الأموال لايمكن استغلالها بطريقة تعطى معدلا أعلى للفائدة من معدل العائد الداخلى .

مثال ٣ ـ ٥ ـ ٢ : شركة لديها فرصة للاستثمار فى مشروع ما . ويمكن للشركة دخول المشروع بدفع مبلغ اجمالى فى البداية ، أو بدفع دفعة أولى قدرها 4000 £ يليها قسطان كل منهما 4000 £ فى السنتين التاليتين ليصبح اجمالى المساهمة 12 000 £ وتجرى جميع الدفعات فى أول يناير من كل عام .

١ ـ فإذا كان معدل الفائدة السارى هو 20% كفائدة مركبة ، ماهو المبلغ الاجمالى الذى تعادل قيمته الحالية المساهمة التى قدرها 12 000 £ على أقساط ؟

٢ ـ اذا كان متاحا لدى الشركة مبلغ 10 000 £ جنيه فقط فى أول يناير ، فما هو معدل الفائدة الذى يجعل هذا المبلغ مقبولا كمبلغ اجمالى يدفع فى بداية المشروع؟

ملاحظـة : يجب توضيح جميع خطوات الحساب

الاجابة :

١ ـ القيمة الحالية المطلوبة هى

$$\begin{aligned}&\pounds4000 + \pounds4000\left(1+\frac{20}{100}\right)^{-1} + \pounds4000\left(1+\frac{20}{100}\right)^{-2}\\&= \pounds4000 + \pounds4000\,(1.2)^{-1} + \pounds4000\,(1.2)^{-2}\\&= \pounds4000 + \pounds3333 + \pounds2778 = \pounds10\,111\end{aligned}$$

٢ ـ المطلوب هنا ليس معدلا داخليا للعائد ، ولكن المبدأ هو نفسه حيث أن المطلوب هو معدل فائدة r يجعل القيم الحالية لمبالغ مستقبلية معلومة تساوى مقدارا معينا .

لنفرض أن معدل الفائدة المطلوب هو r .

$$10\,000 = 4000 + 4000\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-1} + 4000\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-2}.$$

$$6000 = 4000\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-1} + 4000\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-2}$$

$$3 = 2\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-1} + 2\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-2}$$

وبضرب طرفى المعادلة فى المقدار $(1 + r/100)^2$

$$3\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 = 2\left(1+\frac{r}{100}\right) + 2$$

$$3+\frac{3r}{50}+\frac{3r^2}{10\,000} = 4+\frac{r}{50}$$

$$\frac{3r^2}{10\,000}+\frac{r}{25}-1=0$$

$$3r^2 + 400r - 10\,000 = 0$$

وهذه المعادلة من الدرجة الثانية (أنظر الجزء ٢ ـ ٣) ويمكن حلها باستخدام قانون معادلات الدرجة الثانية . ومنه نحصل على

$$r = \frac{-400 \pm \sqrt{160\,000 + 120\,000}}{6} = \frac{-400 \pm \sqrt{280\,000}}{6} = \frac{-400 \pm 529.15}{6}$$

وحيث أنه لامعنى لقيمة سالبة للمعدل r فتكون القيمة المطلوبة لمعدل الفائدة الذى يصبح معه المبلغ الاجمالى المتاح مقبولا هى

$$r = \frac{129.15}{6} = 21.5\%$$

تمرين ٣ ـ ٥ ـ ٢ : تفكر شركة فى استئجار ماكينة لمدة عام بمبلغ 4000 £ . تدفع فى بداية العام . وتقدر الشركة أن دخلها فى نهاية العام نتيجة لوجود الماكينة لديها سيكون 4500 £ . أوجد المعدل الداخلى للعائد على الاستئجار المقترح .

تمارين

٣ ـ ١ المطلوب حساب أى من الطريقتين التاليتين للدفع أرخص علما بأن الدفع يبدأ فى نفس التاريخ ، وأن معدل الفائدة هو 2% كل ثلاثة أشهر (مع بيان خطوات الحساب) :

(١) 10 £ تدفع فى بداية كلا ثلاثة أشهر لمدة عشرين عاما .

(٢) 14.60 £ تدفع فى بداية كل ثلاثة أشهر لمدة عشرة أعوام .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٩)

٣ ـ ٢ بيع عقار بمبلغ 000 20 £ وكان العقد ينص على أن يدفع المشترى فورا مبلغ 8000 £ نقدا ، ثم مبلغ 4000 £ بعد عام ، ثم مبلغ 4000 £ بعد عامين ، ثم مبلغ الـ 4000 £ الباقية فى نهاية العام الثالث ومعها الفائدة المستحقة بمعدل 12% على المبالغ الباقية فى نهاية كل عام .

ماهو المبلغ الذى سيدفعه المشترى فى نهاية العام الثالث لتسديد القرض كلية ؟

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٦)

٣-٣ (أ) استهلكت قيمة أحد الاستثمارات من 000 32 £ إلى 500 23 £ على مدى ست سنوات . فاذا استخدمت طريقة النسبة الثابتة لحساب الاستهلاك احسب المعدل السنوى لأقرب رقم عشرى واحد .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٦)

(ب) بالنسبة للمسألة الواردة فى الجزء (أ) أعلاه احسب قيمة الاستثمار بعد ثلاث سنوات .

الفصل الرابع

المصفوفات

٤ - ١ تمهيـد

المصفوفات هى مجرد وسيلة لتدوين بيانات معينة . وهى تسهل عملية عرض وحل المشاكل التى يمكن حلها بدون مصفوفات أيضا . ولكن هذه الصيغة اقتصادية جدا ، وبالتالى مفيدة جدا . وكثير من المشاكل يمكن صياغتها بسهولة فى صورة مصفوفات ، والتى سوف تكون أكثر تعقيدا بدون استخدام المصفوفات ، واستخدام المصفوفات لايعتمد على المتغيرات بالمعادلات ، بل يتعامل فقط مع المعاملات . وسوف نعطى بعض التطبيقات فيما بعد ، ولكن الآن سوف نركز على طريقة صياغة المصفوفات .

المصفوفة ببساطة هى عبارة عن ترتيب لمجموعة من الأعداد بين قوسين . وعلى سبيل المثال المصفوفة ،

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 13 \\ 9 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

وتسمى الأعداد فى هذا الترتيب بعناصر المصفوفة والمثال السابق يشير فى الحقيقة الى مصفوفة 3×4 (أربعة فى ثلاثة) وذلك لأنها تحتوى على أربعة صفوف ، وثلاثة أعمدة ، وعموما المصفوفة التى تحتوى على m صف ، وعلى n عمود هى مصفوفة $m \times n$ أو تسمى مصفوفة من رتبة $m \times n$.

ويعبر عن المصفوفات عادة فى الصيغ الجبرية بالحروف الكبيرة ، كما فى المثال السابق .

وتختزل المصفوفة الى عمود واحد ، وذلك فى حالة خاصة عندما $n = 1$ فمثلا

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 17 \\ 12.8 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} .$$

وتسمى المصفوفة لهذا النوع بمتجه العمود . ويمثل متجه العمود بالحروف الصغيرة أوبالحروف التى تحتها خط .

٤ ـ ٢ القوانين الجبرية للمصفوفات

(أ) التساوى :

تتساوى مصفوفتان إذا ، واذا فقط كان كل عناصرهما المتناظرة متساوية . وعلى سبيل المثال

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

ويعنى هذا $a = 4$ ، $b = 2$ ، $c = 3$ ، $d = 7$

(ب) الجمع والطرح

يمكن أن تجمع المصفوفات ، أو تطرح إذا ، واذا فقط كانت من نفس الرتبة ، فاذا كانت عملية الجمع ممكنة فان ذلك يتم بجمع العناصر المتناظرة فى المصفوفات المعينة . وعلى سبيل المثال

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+u & b+v \\ c+w & d+x \end{pmatrix}$$

مثال ٤ ـ ٢ ـ ١ : أوجد

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

الاجابة :

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 2+3 \\ 3+4 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

تمرين ٤ ـ ٢ ـ ١ : أوجد

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرين ٤ ـ ٢ ـ ٢ : أوجد

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

تمرين ٤ ـ ٢ ـ ٣ : أوجد $A + B$ إذا كان

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(جـ) حاصل الضرب فى رقم

لضرب المصفوفة فى رقم ، فإنه يضرب كل عنصر فيها على حدة فى نفس الرقم . فمثلا

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

تمرين ٤ ـ ٢ ـ ٤ إذا كان

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$ أوجد $2A + 3B$

(ذ) حاصل ضرب المصفوفات

اعتبر المصفوفتان A و B يعرف المضروب ABإذا ، وإذا فقط كان عدد الأعمدة للمصفوفة A مساويا لعدد الصفوف للمصفوفة B .

وفى هذه الحالة تكون المصفوفتان مناسبتين للمضروب AB .

ولكى نرى كيفية حساب الضرب إذا أمكن ، فسوف نعرض المثال التالى .

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

المصفوفة A تحتوى على 3 أعمدة والمصفوفة B تحتوى على 3 صفوف وعلى هذا فان المصفوفتين مناسبتان للمضروب AB . وسوف تكون مصفوفة المضروب AB من رتبة 2×3 .

$$AB = \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 & a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 & b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 & b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3 \end{pmatrix}$$

نزاوج العناصر الموجودة فى كل صف للمصفوفة A مع العناصر المناظرة فى كل عمود للمصوفة B . تلاحظ أن B تحتوى على 3 أعمدة ، ولكن A تحتوى على 2 من الصفوف فقط . اذن المصفوفتان غير مناسبتين للمضروب BA . ومن الواضح أنه لايمكن عموما أن نحصل على $AB = BA$ ، وذلك لأنه ليس من الضرورى أن يكون كلا المضروبين موجودا ويفرض وجود كلا المضروبين فمن الممكن ألا يتساويان .

وبوجه عام ، إذا كان A من رتبة $m \times n$ و B من رتبة $n \times p$ إذن يكونا متناسبتين للمضروب AB وحاصل الضرب يكون من رتبة $m \times p$. وسوف لايكونا متناسبتين للمضروب مالم يكن $p = m$ واذا تحقق هذا الشرط ، فإن المضروب يكون من رتبة $n \times n$.

مثال ٤ ـ ٢ ـ ٢ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

أوجد AB وأيضا BA

الاجابة :

$$AB = \begin{pmatrix} 2-1 & 6+2 & 12+4 \\ 1-7 & 3+14 & 6+28 \\ 5-3 & 15+6 & 30+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 16 \\ -6 & 17 & 34 \\ 2 & 21 & 42 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2+3+30 & 1+21+18 \\ -2+2+20 & -1+14+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 40 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$$

تمرين ٤ - ٢ - ٥

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

أوجد المضروب الممكن ايجاده .

(هـ) مُدَوَّر المصفوفة :

إذا بُدلت الصفوف والأعمدة للمصفوفة A فالمصفوفة الناتجة تسمى بمدور المصفوفة A ويرمز لها بالرمز A' فمثلا :

$$A = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

ويقال للمصفوفة التى لم تتغير بعد تدويرها بالمصفوفة المتماثلة . وعلى سبيل المثال .

وعلى ذلك تكون متماثلة مدور . $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ هو $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

(و) المصفوفة الصفرية ومصفوفات الوحدة

المصفوفة الصفرية هى المصفوفة التى كل عناصرها تساوى أصفارا . فمثلا

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مصفوفات صفرية . والمصفوفات الصفرية لها نفس دور العدد صفر فى عملية الحساب العادى أى أنه لايتغير قيمة أى مصفوفة إذا جمع عليها ، أو طرح منها مصوفة صفرية ، وناتج ضرب المصفوفة الصفرية فى أى مصفوفة دائما يساوى مصفوفة صفرية . ويؤخذ فى الاعتبار أنه يمكن الحصول على مصفوفة صفرية من ناتج ضرب مصفوفتين غير صفريتين . وعلى سبيل المثال

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

اما مصفوفة الوحدة فهى مصفوفة مربعة (أى أن عدد الصفوف = عدد الأعمدة) كل عناصرها تساوى اصفارا ماعدا عناصر القطر الرئيسى (أى من القمة الشمال الى القاع اليمين) حيث كل منها يساوى الوحدة . ومن ثم

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

كلها أمثلة لمصفوفات الوحدة .

ومصفوفة الوحدة لها نفس دور الرقم واحد فى حاصل الضرب العادى أى أنه لاتتغير قيمة المصفوفة اذا ضربت فى مصفوفة الوحدة . فمثلا .

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 7\\5 & 2 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 7\\5 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

و

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 7\\5 & 2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 7\\5 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

مصفوفة الوحدة دائما يرمز لها بالرمز I ويترك لسياق الكلام توضيح من أى رتبة هى مصفوفة الوحدة العامة المأخوذة ، حتى أنه فى نفس المعادلة يكون الرمز I له رتب مختلفة مع اختلاف موضعه فى المعادلة . ومن المثال السابق نكتب .

$$C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 7\\5 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

والنتائج يمكن أن تلخص على النحو التالى :

$$IC = C = CI$$

وفى الحد الأول تكون I مصفوفة من رتبة 2×2 وفى الحد الأخير تكون I مصفوفة من رتبة 3×3 .

(ى) معكوس المصفوفة

المصفوفات المربعة فقط هى التى يكون لها معكوس . ولايمكن الحصول على معكوس ، أى نوع آخر من المصفوفات ، كما أنه ليس لكل مصفوفة مربعة معكوس . وتسمى المصفوفة المربعة التى ليس لها معكوس بالمصفوفة الشاذة .

المعكوس A^{-1} لمصفوفة المربعة A هو مصفوفة تحقق العلاقة التالية

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

ومعكوس المصفوفة له نفس دور المقلوب فى عمليات الحساب العادى . وعلى سبيل المثال ، القيمة 0.25 هى معكوس للعدد 4 حيث إذا ضرب فى العدد 4 كان الناتج 1 . وذلك لأن $4 \times 0.25 = 0.25 \times 4 = 1$. ومن الممكن ايجاد حل المعادلات المصفوفة اذا أمكن إيجاد معكوس المصفوفات . ولنفترض ، على سبيل المثال ، يوجد لدينا المعادلة $AX = B$ حيث عناصر A وعناصر B معلومة والمطلوب هو إيجاد عناصر X .

وليس له معنى أن نقسم على A ولكنه اذا وجد معكوس A فانه يمكن ضرب طرفى المعادلة من جهة اليسار فى A^{-1} فنحصل على

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

من ثم

$$IX = A^{-1}B$$

أذن

$$X = A^{-1}B$$

وهذا يكافىء فى عمليات الحساب العادى حل المعادلة $4x = 5$ بضرب طرفى المعادلة فى 0.25 وهو معكوس العدد 4 ، للحصول على

$$0.25 \times 4x = 0.25 \times 5$$

$$1x = 1.25$$

$$x = 1.25$$

٤ ـ ٣ استخدام المصفوفات لحل المعادلات الآتية :

التطبيق المباشر للنتيجة الأخيرة فى الجزء ٤ ـ ٢ هو حل مجموعة من المعادلات الآنية . وسوف نعرض فى هذا الجزء بعض مسائل عن مصوفات يمكن أن يكون لها معكوس ، ولكن فى الجزء ٤ ـ ٤ سوف نشرح فعليا كيفية الحصول على معكوس مصفوفة .

مثال ٤ ـ ٣ ـ ١ :

١ ـ حقق بواسطة حاصل الضرب المصفوفى أن معكوس المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{هو} \quad \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & 11 & 3 \\ 6 & -10 & -4 \\ 5 & -13 & -1 \end{pmatrix}$$

٢ ـ استخدم المصفوفات لحل المعادلات الآتية

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \\ x + y - z &= -2 \\ 2x - 3y + 4z &= 8 \end{aligned}$$

الاجابة :

١ ـ

$$\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & 11 & 3 \\ 6 & -10 & -4 \\ 5 & -13 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} = I$$

٢ ـ يمكن كتابة مجموعة المعادلات على الوجه التالى :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

هذه هى معادلة مصفوفية على الشكل الذى عرض فى مؤخرة الجزء ٤ ـ ٢ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

وكل من المصفوفتين الأخيرتين هى من نوع متجه العمود ويمكن كتابة الحل على صيغة المصفوفات على الوجه التالى $Ax = b$.

ومن البند ٤ ـ ٢ نلاحظ أن $x = A^{-1} b$ ومن ثم

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & 11 & 3 \\ 6 & -10 & -4 \\ 5 & -13 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 38 \end{pmatrix}$$

ويكون الحل هو $x = \frac{-1}{7}, y = \frac{6}{7}, z = \frac{19}{7}$

تمرين ٤ ـ ٣ ـ ١:

(أ) حقق بواسطة حاصل الضرب المصفوفى أن معكوس المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ هو } \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(ب) بفرض أن X و Y هما ناتجان يتم الحصول عليهما باجراء عمليتين . وأن الوقت الكلى المتَاح للعملية I هو 66 ساعة (x يتطلب 18 ساعة و Y يتطلب 6 ساعات) ، والوقت الكلى المتاح للعملية II هو 68 ساعة (X يتطلب 12 ساعة و Y يتطلب 16 ساعة) .

والمطلوب منك أن تستخدم طرق المصفوفات لتعين كم من X و Y يمكن أن ينتج إذا استغل وقت الاستعمال بالكامل .

(م م ت لـ المهنى أ ـ ١٩٧٦ ورقة نموذج)

٤ ـ ٤ حساب معكوس المصفوفات

سوف نعرض فى هذا الجزء كيفية الحصول على معكوس مصفوفات من الرتب 2 × 2 و 3 × 3 وفى العادة المصفوفات كبيرة الرتب التى لايمكن إيجاد معكوسها بالخطوات البسيطة ولكن يمكن استخدام الحاسب الآلى لايجاد معكوسها .

ومبدئيا يجب أن نعرض فكرة محدد المصفوفة 2 × 2 . ويرمز لها لمحدد المصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ويكتب على الصورة $ad - bc$. وعلى هذا فالمحدد ماهو الا عدد .

ويمكن الحصول على معكوس مصفوفة من رتبة 2 × 2 بتبديل العناصر الموجودة على القطر الرئيسى ، مع تغيير اشارات الحدين الآخرين ثم القسمة على قيمة المحدد . وعلى هذا

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

مثال ٤ ـ ٤ ـ ١: اعكس المصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

الاجابة :

هذه هى المصفوفة التى استخدمت فى التمرين ٤ـ٣ـ١ ، حيث أن قيمة محددها يساوى 9 = 3 - 12 = 3 × 1 - 4 × 3 وبتبديل وتغير الاشارات نحصل على

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

تمرين ٤ ـ ٤ ـ١ : لنفترض نظام لمشاركة العمل فى الأرباح ينص على أن يأخذ العمال 10% من المكسب بعد الضرائب . والمدفوعات للعمال طبقا لهذا النظام تخضع لتخفيض ضريبى والضريبة تؤخذ على 50% علما بأن الضريبة السنوية المأخوذة عن المكسب حتى 31 مارس 1977 كانت 000 100 £ قبل مشاركة نصيب العمال فى المكسب . والمطلوب حساب المبلغ المفروض توزيعه على العمال باستخدام مصفوفات جبرية . ضع المسألة فى صيغة رياضية ، ثم أوجد الحل موضحا جميع الخطوات اللازمة .

(م م ت أ ـ المهنى أ ـ مايو ١٩٧٧)

ومعكوس مصفوفة من الرتبة 3 × 3 أكثر استطالة ولكنه يتوقف أيضا على المحددات لمصفوفات من الرتبة 2 × 2 .

مثال ٤ ـ ٤ ـ ٢ اعكس المصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

الاجابة : الخطوة الأولى هى تكوين مصفوفة جديدة من الرتبة 3 × 3 عناصرها هى المحددات لمصفوفات من الرتبة 2 × 2 التى نحصل عليها بحذف الصف والعمود اللذين يحتويان على العنصر المأخوذ فى المصفوفة الأصلية . وكذلك تضاف اشارة سالبة لجميع العناصر ماعدا العناصر التى فى الأركان ، والعنصر الذى فى المركز . ومن ثم نحصل على

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4-3 & -(4+2) & -3-2 \\ -(8+3) & 12-2 & -(-9-4) \\ -2-1 & -(-3-1) & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 \\ -11 & 10 & 13 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

وتسمى عناصر هذه المصفوفة المحيدات للمصفوفة الأصلية .

الخطوة الثانية هى ايجاد محدد المصفوفة الأصلية . المحدد لمصفوفة من الرتبة 3 × 3 نحصل عليه بأخذ أى صف أو عمود ، وحساب لكل عنصر قيمته مضروبة فى قيمة المحدد له . وجمعها جميعا . فباستخدام الصف الأول هنا نحصل على $3 \times 1 + 2 \times (-6) + 1 \times (-5) = -14$.

الخطوة الثالثة ، والأخيرة هى ايجاد مدور مصفوفة المحددات ، وقسمتها على قيمة المحدد.

ومن ثم

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-14)} \begin{pmatrix} 1 & -11 & -3 \\ -6 & 10 & 4 \\ -5 & 13 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -1 & 11 & 3 \\ 6 & -10 & -4 \\ 5 & -13 & -1 \end{pmatrix}$$

وهذا كما هو معطى فى المثال ٤ ـ ٣ ـ ١ .

تمرين ٤ ـ ٤ ـ ٢: أوجد معكوس نظام المعادلات الخطية الآتى باستخدام طريقة المصفوفات الجبرية لايجاد قيم المتغيرات x_1 , x_2 و x_3 .

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$$
$$-3x_1 - 4x_2 + x_3 = -2$$

(م م ت أ ـ المهنى ـ مايو ١٩٧٦)

٤ ـ ٥ تحليل المدخلات ـ المخرجات

هذا الأسلوب يمكن تطبيقة على قطاعات اقتصادية ، أو شركات فردية ، وفى حالة استخدام الناتج من القطاعات الاقتصادية أو أقسام الشركة كمدخلا لنفس القطاع ، أو قطاعات أخرى . والمشكلة الرئيسية التى يستخدم فى حلها نظام تحليل المدخل ـ المخرج هى الحصول على كمية الانتاج اللازمة من كل قطاع لكى نحقق المطالب النهائية . والمخرجات الكلية المطلوبة سوف تزيد على المطالب النهائية حيث أن بعض النواتج سوف يستخدم فى القطعاعات المختلفة .

وباستعراض المثال التالى لاقتصاد افتراضى يتكون من ثلاثة قطاعات X , Y و Z . حيث وحدات المدخلات والمخرجات بالمليون جنيه ، كما هو موضح فيما يلى :

	المدخلات الى				
	X	Y	Z	المطلوب النهائى	الناتج الكلى
ناتج من X	90	150	225	75	540
ناتج من Y	135	150	300	15	600
ناتج من Z	270	200	300	130	900

عند تخطيط جدول مناظر يجب استخدام نفس الوحدات لجميع النواتج المأخوذة فى الاعتبار هنا ، وهو ليس المتبع دائما وان ناتج قطاع ما يستخدم كمدخل لنفس القطاع كما هو مبين . اما اذا كان هذا الاعتبار غير متحقق ، ففى هذه الحالة نحصل على قيم صفرية على القطر الموجود بالجدول المرتبط بالقطاعات (انظر الى نص التمرين رقم 3)

> الاساس المتعارف عليه لتحليل المدخلات ـ والمخرجات هو
> المدخلات الكلية = المخرجات الكلية

اذن المدخلات الكلية للقطاعات X ، Y و Z هى 540 ، 600 و900 على الترتيب . والفروق بين هذه الارقام والمدخلات المأخوذة من القطاعات . تمثل مدخلات اخرى ، وتتضمن من الوجهة العملية اشياء مثل المواد الخام ، للعمالة والارباح (أو الخسارة) .

ومن ثم يمكننا توسيع جدول المدخل ـ المخرج المعطى على الوجه الاتى

		X	Y	Z	المطلوب النهائى	الناتج النهائى
	X	90	150	225	75	540
	Y	135	150	300	15	600
	Z	270	200	300	130	900
مدخل آخر		45	100	75		
مدخل كلى		540	600	900		

فيما يلى الفرض الذى ترتكز عليه نظرية المدخل ـ المخرج وهو مجال لبعض الجدول

ان المخرجات تتغير لكى تتجاوب مع تغيرات المطالب النهائية والنسبة لمدخل قطاع ما من أحد المصادر تظل ثابتة

$\frac{90}{540}$ من دخل X الناتج من X $\frac{150}{600}$ دخل Y الناتج من X $\frac{225}{900}$ دخل Z الناتج من X .

$\frac{135}{540}$ من دخل X الناتج من Y $\frac{150}{600}$ دخل Y الناتج من Y $\frac{300}{900}$ دخل Z الناتج من Y .

$\frac{270}{540}$ من دخل X الناتج من Y $\frac{200}{600}$ دخل Y الناتج من Z $\frac{300}{900}$ دخل Z الناتج من Z .

وهذه النسب توضع فى المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} \frac{90}{540} & \frac{150}{600} & \frac{225}{900} \\ \frac{135}{540} & \frac{150}{600} & \frac{300}{900} \\ \frac{270}{540} & \frac{200}{600} & \frac{300}{900} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

وتسمى بمصفوفة المدخلات ـ المخرجات وعناصرها تسمى بالمعاملات التقنية وبافتراض أن المطالب النهائية الحالية تتغير من 75 , 15 و 130 الى d_x , d_y و d_z بالنسبة لانتاج القطاعات X , Y و Z على التوالى . والمطلوب هو ايجاد المخرجات الكلية X_x , X_y و X_z المتطلبة من القطاعات الثلاثة حتى تتلاءم مع هذه المطالب . واذا كانت هذه هى المخرجات الكلية ، اذن بالعرف المتفق عليه تكون المدخلات الكلية للقطاعات هى X_x , X_y و X_z .

وتكون المخرجات الكلية المطلوبة من X هى

$$X_x = d_x + \frac{90}{540} \times (\text{الدخل الكلى الى } X) + \frac{150}{600} \times (\text{الدخل الكلى الى } Y) + \frac{225}{900} \times (\text{المدخل الكلى الى } Z)$$

أى أن ،

$$X_x = d_x + \frac{1}{6} X_x + \frac{1}{4} X_y + \frac{1}{4} X_z$$

وبنفس الأسلوب بالنسبة للقطاع Y :

$$X_y = d_y + \frac{1}{4} X_x + \frac{1}{4} X_y + \frac{1}{3} X_z$$

وبالمثل بالنسبة للقطاع Z :

$$X_z = d_z + \frac{1}{2} X_x + \frac{1}{3} X_y + \frac{1}{3} X_z$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات الثلاث على صورة مصفوفة على الوجه التالى :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix}$$

أو

$$\mathbf{IX} = \mathbf{d} + \mathbf{AX}$$

حيث أن

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix}$$

ومن ثم

$$\mathbf{IX} - \mathbf{AX} = \mathbf{d}$$

اذن

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{d}$$

وعليه

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{d}$$

هذه هى المعادلة الأساسية لتحليل المدخل ـ المخرج وهى تمكننا من ايجاد مجموعة المخرجات المطلوبة للقطاع X لتحقق مجموعة المطالب النهائية المعطاة **d** . كما يتطلب فى حل مسألة تحليل المدخل ـ المخرج إيجاد المصفوفات **A** و **d** ثم بالتعويض مباشرة فى المعادلة السابقة .

لنفترض فى مثالنا هذا أن المطالب النهائية هى **£ 50m** من انتاج X ، **£ 10m** من انتاج Y ، **£ 100m** من انتاج Z وعلى هذا

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix}$$

نحصل على

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

اذن

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ومن ثم

$$X = (I - A)^{-1} d = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{335}{109} & \frac{216}{109} & \frac{234}{109} \\ \frac{288}{109} & \frac{372}{109} & \frac{294}{109} \\ \frac{395}{109} & \frac{348}{109} & \frac{486}{109} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{42\,360}{109} \\ \frac{47\,520}{109} \\ \frac{71\,880}{109} \end{pmatrix}$$

وتكون النواتج الكلية المتطلبة هى 388.62 مليون £ من انتاج X ، 435.96 مليون £ من انتاج Y ، 659.45 مليون £ من انتاج Z .

تمرين ٤ ـ ٥ ـ ١ دخل افتراضى يتكون من قطاعين A و B لهما المدخل والمخرج بملايين الجنيهات على النحو التالى :

	المدخل الى			
	A	B	المطلب النهائى	الناتج الكلى
المخرج من A	150	240	210	600
المخرج من B	200	120	160	480

أوجد الناتج الكلى المطلوب اذا كانت المطالب النهائية تتغير الى 100 مليون £ من انتاج A والى 200 مليون £ من انتاج B .

وأحد تطبيقات المصفوفات الذى يرتبط ارتباطا موثقا بتحليل المدخل ـ المخرج وله أهمية للمحاسبة هى مسألة توزيع تكاليف أقسام الخدمات على أقسام الانتاج . وبعض نواتج أقسام الخدمات تستغل بواسطة أقسام الخدمات نفسها . وهذه التعاملات الداخلية يجب أن توضح حتى يمكن تحديد المبالغ التى يلزم تحميلها على أقسام الانتاج .

مثال ٤ ـ ٥ ـ ١ توزيع تكاليف قسم الخدمة على أقسام الانتاج وأقسام الخدمات الأخرى يمكن أن يمثلوا فى مصفوفة جبرية واحدة

افترض البيانات التالية :

	اقسام الخدمة (صيانة ـ كهرباء)		اقسام الانتاج (ميكنة ـ تجميع)	
	صيانة	كهرباء	ميكنة	تجميع
ساعات عمل للصيانة	–	3 000	16 000	1 000
وحدات الكهرباء المستهلكة	20 000	–	130 000	50 000
تكاليف القسم قبل أى ضم لأقسام الخدمة	£50 000	£4 000	£140 000	£206 000

والمطلوب هو :

احسب التكاليف الكلية لكى توزع على أقسام الأنتاج مستخدما مصفوفة جبرية (ضع المسألة فى صيغة رياضية ووضح طريقة الحل) .

(م م ت أ ـ المهنى أ : مايو ١٩٧٧)

الاجابة : لنفترض أن x هى تكلفة الصيانة « الفعلية » فى النظام بعد تحديد الكهرباء وأن y هى تكلفة الكهرباء « الفعلية » فى النظام بعد تحديد الصيانة . اذن

$$x = 50\,000 + 0.1y$$

وحيث أن الصيانة المستخدمة هى 1/10 من الكهرباء الكلية فى النظام .

$$y = 4000 + 0.15x$$

وحيث أن الكهرباء المستخدمة هى 3/20 من الصيانة الكلية فى النظام . من ثم

$$\begin{matrix} x - 0.1y = 50\,000 \\ -0.15x + y = 4\,000 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0.1 \\ -0.15 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 4\,000 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.1 \\ -0.15 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 50\,000 \\ 4\,000 \end{pmatrix}$$

اذن

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0.985} & \frac{0.1}{0.985} \\ \frac{0.15}{0.985} & \frac{1}{0.985} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50\,000 \\ 4\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50\,400}{0.985} \\ \frac{11\,500}{0.985} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51\,167.51 \\ 11\,675.13 \end{pmatrix}$$

وباستخدام النسب التى يحصل عليها من الجدول المعطى ، فإننا نحصل على التكاليف الفعلية الموزعة على أقسام الانتاج .

$$\begin{pmatrix} 51\,167.51 \\ 11\,675.13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{16}{20} & \frac{13}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{5}{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 140\,000 \\ 206\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{تكلفة الآلات} \\ \text{تكلفة التجميع} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 140\,000 \\ 206\,000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40\,934.01 + 7\,588.83 \\ 2\,558.38 + 2\,918.78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 188\,522.84 \\ 211\,477.16 \end{pmatrix}$$

التكاليف الكلية الى أقرب جنيه الموزعة على أقسام الانتاج هى 523 188 £ بالنسبة للآلات 477 211 £ بالنسبة للتجميع .

تمرين ٤ ـ ٥ ـ ٢ مصنع لديه قسمان للخدمة S_1و S_2 وقسمان للانتاج P_1 و P_2 ومخصصات كل قسم موضحة كما يلى :

S_1	S_2	P_1	P_2
£6000	£10 000	£8000	£17 000

وكقاعدة لاستعمال الخدمات S_1 فإنها توزع كالتالى :

30% لـ S_1 , 25% لـ P_1 و 45% لـ P_2 .

وبالنسبة لـ S_2 :

40% لـ S_1 , 33% لـ P_1 و 27% لـ P_2 .

والمطلوب وضع صورة مصفوفات تعبر عن I , A و b للحصول على التحديد الأكثر دقة لمخصصات أقسام الخدمة الى أقسام الانتاج ، وحيث أن

$$S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad S = (I - A)^{-1}b$$

احسب المخصصات الكلية للتكلفة النهائية المخصصة لـ P_1 و P_2 .

(م م ت أ ـ المهنى أ ـ مايو ١٩٨٠)

تمارين

٤ ـ ١ تستخدم غالبا حلول نظم المعادلات الخطية فى معالجة مشاكل المواجهة الادارية والموضحة بالنظام العام التالى :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}\ x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots a_{2n}\ x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

والمطلوب هو :

(١) التعبير عن النظام السابق بصيغة المصفوفات ، وتعيين المصفوفة ، المنفصلة والعناصر المتجهة .

(٢) اذكر حجم المصفوفة .

(م م ت أ ـ المهنى أ ـ مايو ١٩٧٦)

٤ ـ٢ يتطلب انتاج تغذية حيوان ما خليط 31b من القمح (w) و 61b من الشعير (b) و 31b من الجزر (c) ، والسعر لكل 1b هو 10 ، 9 و 6 على التوالى :

والمطلوب :
(أ) أذكر المصفوفة لعملية تعيين التكلفة C لانتاج 11 1b من التغذية .
(ب) أوجد الحل .

(م م ت أ ـ المهنى أ ـ مايو ١٩٨٠)

٤ ـ٣ شركة لها ثلاثة أقسام للانتاج P ، Q و R بمدخلات ومنتجات مقارنة بالوحدات الموضحة على النحو التالى :

	المدخل الى P	المدخل الى Q	المدخل الى R	المطلب النهائى	الناتج الكلى
الناتج من P	0	30	60	110	200
الناتج من Q	10	0	90	150	250
الناتج من R	25	25	0	250	300

أوجد الانتاج الكلى المتطلب من الأقسام اذا كانت المطالب النهائية تتغير الى 300 ، 200 و 400 على التوالى .

٤ ـ ٤ : أوجد صورة المصفوفة لحل المسائل التالية . ولاحظ المطلوب فى حلها .

(أ)

$$\begin{aligned} 40x + 70y + 7z - 300 &= 0 \\ 22x + 35y + 12z - 525 &= 0 \\ y + z - 30 &= 0 \end{aligned}$$

على شكل : $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$

(ب) التكلفة الكلية C لشراء أربع سلع من ممول ، وكلها مختلفة السعر :

على شكل : $\mathbf{q}'\mathbf{p} = C$

(م م ت أ ـ المهنى أ ـ نوفمبر ١٩٧٨)

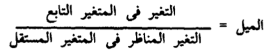
الفصل الخامس

حساب التفاضل

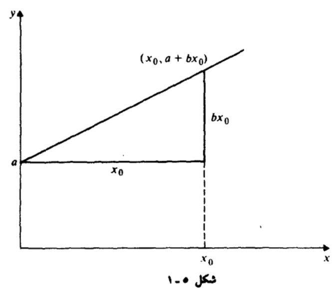
٥ ـ ١ تعريف المشتقة الأولى

حساب التفاضل يختص بالتحليل الرياضى الخاص بالتغير ، حيث أن كثيرا من المفاهيم للأعمال والشئون المالية تحتوى على تغيير ، وحساب التفاضل هو وسيلة قيمة للمحاسبين ، ورجال الأعمال . وعلى سبيل المثال ، الربح ممكن أن يتغير حسب كمية الانتاج ، والطلب على الأنتاج ممكن أن يتغير حسب ثمنه ، ويستخدم حساب التفاضل لتصغير أو تكبير الدوال ، مثل دالة الربح أو دالة التكلفة .

عموما سندرس الميل ، أو الانحدار للخط المستقيم ومثل هذه الدالة تعطى على الصورة $y = a + bx$ حيث أن المعاملين a و b هما المقطع والميل للدالة ، على التوالى ، كما هو موضح فى الشكل ٥ ـ ١ ويتعين الميل من التعريف الآتى :



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير فى المتغير التابع}}{\text{التغير المناظر فى المتغير المستقل}}$$



شكل ٥ ـ ١

وعلى سبيل المثال ، عندما توجد نقطتان على خط مستقيم ، ولتكن (3 ، 1) و (7.5 ، 4) فباستخدام التعريف السابق نحصل على

$$\text{الميل} = \frac{7.5 - 3}{4 - 1} = \frac{4.5}{3} = 1.5$$

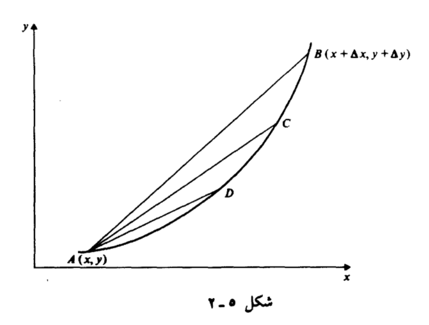
ومن الواضح أن ميل الدالة الخطية هو مقدار ثابت ؛ أى أن الميل هو نفسه عند كل نقطة على الخط . ومن المألوف أن أن نرمز Δy (« دلتا » y) للتغير فى y و Δx للتغير فى x وعلى هذا فأن ميل الخط الواصل بين النقطتين (x_1 ، y_1) و (x_2 ، y_2) هو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

الميل للمنحنيات التى ليست لها خطوط مستقيمة يعتبر مقدارا غير ثابت ولكنه يتغير كلما تحركنا على المنحنى . ولنفترض المنحنى كما بالشكل ٥ ـ ٢ ، ويراد معرفة الميل عند A علما بأن هذا الميل يمكن الحصول عليه من تقريب الميل للخط AB أى أنه يقدر بالمقدار $\Delta x/\Delta y$ ولنفترض الآن نقطة مأخوذة على المنحنى ولتكن C فمثلا وهى قريبة من A أكثر من قربها من B والميل للخط المستقيم AC هوتقريب للميل عند A أفضل من ميل AB . وبنفس الطريقة ، اذا أخذنا نقطة أخرى ، ولتكن D أكثر اقترابا من A وعليه فاننا نحصل على تقريب أفضل بقياس ميل AD . وسوف نستمر فى تكرار هذه العملية على هذا النمط ، واذا حدث أن اختيرت النقطة أكثر اقترابا من A بحيث لايمكن تفرقتها عن A حينئذ سوف نحصل على الميل بالضبط للدالة عند النقطة A .

ونعرف الميل عند A كقيمة نهائية للنسبة $\Delta x/\Delta y$ كلما اقتربت Δx الى الصفر ، أى أنها لايمكن تفرقتها عن الصفر . أذن يعرف الميل على النحو التالى

$$\text{الميل} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



شكل ٥ ـ ٢

أى نهاية المقدار $\Delta y/\Delta x$ عندما Δx تقترب من الصفر . وتسمى هذه النهاية بمشتقة الدالة ويعطى لها الرمز dy/dx . وعلى هذا ، فان

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

وعملية الحصول على المشتقة الأولى للدالة تنسب الى علم التفاضل .

وعندما توجد علاقة بين y و x بحيث أن قيمة y تعين بوجود x وغالبا يمكن كتابتها على الصورة $y = f(x)$ (وتقرأ f لـ x) ويكون الطريقة الأخرى للرمز عن المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ وبالنسبة الى x هى $f'(x)$ (وتقرأ f داش x) . ومن الملاحظ أن المشتقة الأولى للدالة هى نفسها دالة لـ x ، وأيضا الميل للدالة عند نقطة خاصة يحصل عليه بالتعويض عن قيمة x المطلوبة .

مثال ٥ ـ ١ ـ ١ : استخدم تعريف المشتقة الأولى لايجاد تفاضل الدالة $y = x^2$.

الاجابة : سوف نفترض نقطتين على المنحنى ويقتربان كل منهما للآخر ، وليكن (x , y) و $(x + \Delta x , y + \Delta y)$ وعلى هذا نحصل على $y = x^2$ و $(y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2$ بالطرح ينتج أن

أى أن :

$$(y + \Delta y) - y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

وأذا أجرينا قسمة الطرفين على Δx نحصل على

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

ولكن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

إذن ميل $y = x^2$ عند أى نقطة يعطى بالدالة $dy/dx = 2x$.

الميل عند $x = 1$ هو $dy/dx = 2$

الميل عند $x = -5$ هو $dy/dx = -10$ الى أخره .

مثال ٥ ـ ١ ـ ٢ بأستخدام تعريف التفاضل كعملية نهائية ، أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية

١ ـ $y = x^3$.

٢ ـ $y = 3x^2 + 5x + 7$.

الاجابة :

١ ـ اذا كان $y = x^3$ و $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$ إذا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$$

و

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2$$

٢ - إذا كان $y = 3x^2 + 5x + 7$ ، إذا

$$(y+\Delta y)=3(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)+7$$

ومن ثم

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{[3(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)+7]-[3x^2+5x+7]}{\Delta x}$$

$$=3(2x+\Delta x)+5$$

وعلى هذا

$$\frac{dy}{dx}=6x+5$$

لاحظ أن الثابت 7 لم يظهر .

هذه الطريقة الجبرية يمكن دائما استخدامها لايجاد مشتقة دالة معطاه ، بالرغم من أنها شاقة إلى حد ما بالنسبة الى الدوال المركبة . وعمليا لاستخدام هذه الطريقة لحساب ميل المنحنى ، ولكن عوضا عنها سوف نستخدم بعض القواعد الخاصة التى يمكن استنتاجها من التعريف السابق للتفاضل . وعادة تستخدم هذه القواعد فى التطبيق لعملية استخدام التفاضل . والآن سوف نعرض القواعد ونقترح أمثلة لتوضيح كيفية استخدامها .

القاعدة الأولى: إذا كانت $y = c$ ، حيث c مقدار ثابت ، فان $dy/dx = 0$ أى أن ، مشتقة المقدار الثابت تساوى صفرا .

مثال : إذا كان $y = 8$ إذن $dy/dx = 0$.

القاعدة الثانية: إذا كان $y = x^n$ فإن $dy/dx = nx^{n-1}$.

مثال : إذا كانت $y = x^3$ فإن $dy/dx = 3x^2$.

(عموما قد حصلنا على هذه النتيجة سلفا)

مثال : إذا كان $y = x^9$ فإن $dy/dx = 9x^8$.

مثال : إذا كان $y = 1/x^3 = x^{-3}$ فإن $dy/dx = -3x^{-4} = -3/x^4$.

القاعدة الثالثة: إذا كانت $y = ax^n$ فإن $dy/dx = nax^{n-1}$. حيث أن a مقدار ثابت .

مثال : إذا كان $y = 5x^2$ فإن $dy/dx = 5 (2x) \ 78 \ 10x$

مثال : إذا كان $y = 8x^4$ فإن $dy/dx = 8 (4x^3) = 32 x^3$

مثال : إذا كان $y = 2/x^4 = 2x^{-4}$ فإن $dy/dx = 2 (-4x^{-5}) = 8/x^5$

القاعدة الرابعة : نفترض أن u و v كل منهما دالة لـ x . وأن du/dx و dv/dx مشتقاتهما بالنسبة الى x حينئذ إذا كان $y = u = v$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

مثال : اذا كان $y = x^2 + x^3$ فإن $dy/dx = 2x + 3x^2$.

مثال : إذا كان $y = 5x^4 + 7x$ فإن $dy/dx = 20x^3 + 7$.

مثال : إذا كان $y = 3x^2 + 5x + 7$ فإن $dy/dx = 6x + 5$ (التى تكافىء الاجابة فى المثال ٥ - ١ - ٢) (٢)) .

وعموما مشتقة مجموع عدة دوال يساوى مجموع مشتقاتها المتناظرة . ومن أجل ذلك ، من الممكن ايجاد المشتقة (الميل) عند أى نقطة بشرط أن الدالة تكون على الصورة .

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + . . . + a_n x^n .$$

مثال ٥ - ١ - ٣ باستخدام نتائج التفاضل ، أوجد dy/dx لكل من الدوال التالية وأحسب الميل للمنحنى عند النقطة المعطاه .

١ - $y = 3x^3 + 2x^2 + 4x - 8$ عند (1 ، 1) .

٢ - $y = 2x + 4/x$ عند (6 ، 2) .

الاجابة

١ - عندما $y = 3x^3 + 2x^2 + 4x - 8$ فإن $dy/dx = 9x^2 + 4x +4$.

عندما $x = 1$ ، $dy/dx = 17$ فإن الميل = 17 .

٢ - عندما $y = 2x + 4/x = 2x + 4x^{-1}$ فإن $dy/dx = 2 - 4/x^2$

عندما $x = 2$ ، $dy/dx = 1$ فإن الميل = 1 .

أيضا الثابت الأسى e له بعض الخواص المتعلقة بالتفاضل . إذا كان $y = \ln x$.

فإن

$$dy/dx = 1/x$$

أى أن ، الميل عند أى نقطة على المنحنى $y = e^x$ يساوى قيمة y عند النقطة . ولربما القارىء يود أن يتحقق من هذه النتيجة ، وذلك برسم المنحنى الأسى على ورق رسم بيانى ، ويقدر الميل عند نقط مختلفة .

ونتيجة مفيدة أخرى على النحو التالى ، إذا كان

$. y = \ln x$ فإن

$dy/dx = 1/x$

تمرين ٥ ـ ١ ـ ١ : لكل دالة أوجد dy/dx والميل للمنحنى عند النقطة المعطاة .

١ ـ $y = x^4$ عند $(0 \text{ ، } 0)$.

٢ ـ $y = 5x^2 - 3x - 4$ عند $(2 \text{ ، } 10)$.

٣ ـ $y = 4 + 2/x$ عند $(-1 \text{ ، } 2)$.

٤ ـ $y = x + 1 + 1/x$ عند $(1 \text{ ، } 3)$.

٥ ـ $y = \ln 5x$ عند $(1 \text{ ، } \ln 5)$.

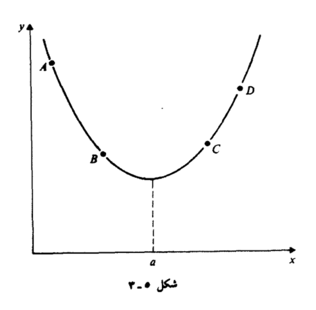
٥ ـ ٢ القيم العظمى والصغرى :

المفاهيم للقيم الكبرى والصغرى هى مصطلحات شائعة تستخدم فى الحياة اليومية ، فمثلا القيمة العظمى لمجموعة كبيرة من فواتير الحسابات هى الكمية الواضحة فى فاتورة الحساب ، التى تكون أكبر من كل الفواتير الأخرى . والقيمة الصغرى هى الكمية فى فاتورة الحساب التى تكون أصغر من كل الفواتير الأخرى ، ومن الضرورى فى هذه الحالة فحص كل فاتورة للفصل ، أيهما يكون أكبر ، أو أصغر من الآخر . ومن الطبيعى ، أن هذه الطريقة تكون شاقة ولحسن الحظ لدينا الطريق الأكثر تقويما لايجاد القيم العظمى والصغرى متاحا لنا لحل مشاكل عدد من الأعمال ومشاكل الأعمال المالية .

دعنا الآن ندرس المشتقة عند أربع نقط A ، B ، C و D كما فى الشكل ٥ ـ ٣ . عند A يكون الميل $f'(x)$ سالبا . وكلما تقدمنا الى B ، يظل $f'(x)$ سالبا ، ولكن ليس كبيرا (بالنسبة لمفهوم السالب) وعند C تكون $f'(x)$ موجبة وتتزايد إجابيا كلما تحركنا الى D . واذا كان الميل سالبا عند A ، B ولكن موجبا عند C ، D فإن عند أحدى النقط بين B ، C(عند $x = a$) لابد أن يكون الميل مساويا للصفر ففى شكل ٥ ـ ٣ تتعين **نقطة الدوران الصغرى** للدالة عند $x = a$.

وبالمثل ، إذا نظرنا إلى الشكل ٥ ـ ٤ فالميل لدى اليسار عند $x = a$ يكون سالبا ، ولكنه يتناقص فى المقدار كلما تحركنا نحو $x = a$ من جهة اليسار . أما من جهة اليمين عند $x = a$ الميل يكون سالبا ، ثم يصبح أكبر بقيم مطلقة كلما تحركنا أقصى اليمين . ومرة أخرى عند النقطة $x = a$ فان الميل (المشتقة) يكون مساويا للصفر . وشكل٥ ـ ٤ يوضح **نقطة الدوارن العظمى** عند $x = a$.

والصورة المشتركة لهذين الشكلين هى عند النقطة $x = a$ التى عندها المشتقة تساوى الصفر . ومن ثم يمكننا الانتفاع من هذه المعلومة لتوضيح نقط الدوران العظمى والصغرى للدوال . ومعنى أن $f'(x) = 0$ ليس بالضرورة أنه يشير الى نقطة الدوران . وكما نرى فى شكل٥ ـ ٥ الميل لدى اليسار للنقطة $x = a$ يكون موجبا ، ويتناقص فى المقدار كلما اقتربنا من $x = a$ ولدى اليمين للنقطة عند $x = a$ تكون المشتقة موجبة وتتزايد فى المقدار كلما تحركنا بعيدا لدى اليمين . وعند النقطة $x = a$ ثانيا ، الميل يساوى صفرا . ومن الواضح أن مثل هذه النقطة أما أن تكون نقطة دوران عظمى ، أو نقطة دوران صغرى ، ويعبر عنها بنقطة الأنقلاب.. وسوف لانتعرض لمثل هذه النقط فى هذا الكتاب .



شكل ٥ ـ ٣

ويمكن أن نستخدم الطريقة التالية لايجاد نقط الدوران للدالة المعطاة .

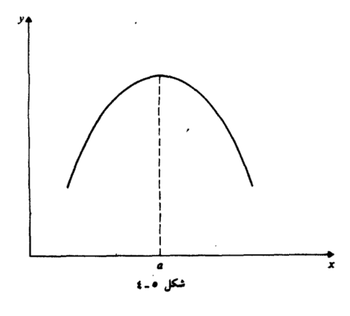
فاضل الدالة المعطاة للحصول على الميل . وضع الميل يساوى صفرا ، وحل المعادلة الناتجة .

مثال ٥ ـ ٢ ـ ١ : أوجد نقط الدوران للمنحنى .

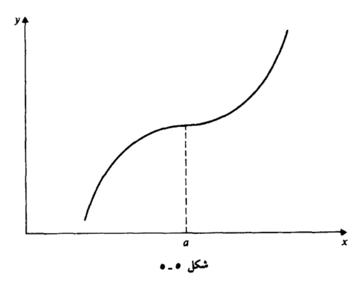
$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

الاجابة : بتطبيق القواعد فى الجزء ٥ ـ ١ ، نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$$
$$= 3(x^2 - 4x + 3)$$
$$= 3(x - 3)(x - 1)$$



شكل ٥ ـ ٤



شكل ٥ـ٥

بناء على ذلك فان $dy/dx = 0$ عندما $x = 1$ وعندما $x = 3$

عندما $x = 1$ ، $y = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$.

عندما $x = 3$ ، $y = 27 - 54 + 27 - 4 = - 4$.

إذا كان الميل للمنحنى عند النقط (1,0) و (3 ، 4 -) يساوى صفرا . وهذه هى نقط الدوران . ومهما كان الى هذا الحد ، فاننا لم نتمكن من تحديد أى من هذه النقط ، يكون نقطة دوران عظمى أم نقطة دوران صغرى ، أو نقطة انقلاب .

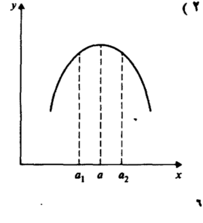
وسوف نعرض الآن مسألة كيفية التمييز بين هذه الحالات الممكنة . إحدى هذه الطرق اختبار إشارة المشتقة بالقرب من $x = a$ قبل $x = a$ بقليل ، وبعد $x = a$ بقليل .

فى شكل ٥ ـ ٦ (١) ، $f'(a_1) < 0$ ، $f'(a) = 0$ و $f'(a_2) > 0$ هذه النتائج تشير الى نقطة الدوران الصغرى .

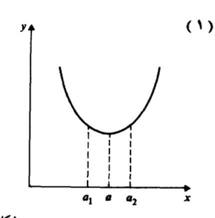
فى شكل ٥ ـ ٦ (٢) $f'(a_1) > 0$ ، $f'(a) = 0$ ، و $f'(a_2) < 0$ هذه النتائج تشير الى نقطة الدوران العظمى .

ويمكن أستخدام هذه الطريقة لتوضيح نقط الدوران العظمى والصغرى ، ولكن a_1 و a_2 يجب أن تختاران قريبين من a لتأكيد صحة التحديد . والطريقة البديلة ، الأقل جهدا ، هى تكون عادة مفيدة حيث أنها تحتوى إيجاد مشتقة المشتقة واختبار اشارتها . وتعرف مشتقة dy/dx بالمشتقة الثانية ويرمز لها d^2y/dx^2 أو $f''(x)$.

(٢)



(١)



شكل ٥ ـ ٦

إذن مرة ثانية نختبر شكل ٥ ـ ٦ (١) نجد أن الاشارة للمنحنى تتغير من سالبة الى موجبة بين $x = a_1$ و $x = a_2$ ، أى أن ، الميل يتزايد . ويمكننا حساب أنه عند نقطة الدوران الصغرى d^2y/d^2x تكون موجبة . وفى شكل ٥ ـ ٦ (٢) نجد أن الميل يتغير من موجب الى سالب ، أى أن الميل يتناقص . وعلى هذا ، عند نقطة الدوران العظمى ، تكون d^2y/d^2x سالبة . إذن يمكننا أن نعين نقط الدوران العظمى والصغرى باستخدام الطريقة التالية :

فاضل الميل وأختبر الاشارة للمشتقة الثانية بالتعويض عن قيمة نقطة الدوران . واذا كانت المشتقة الثانية موجبة ، فتكون نقطة الدوران الصغرى قد عينت ، أما اذا كانت المشتقة الثانية سالبة فتكون نقطة الدوران العظمى قد عينت .

مثال ٥ ـ ٢ ـ ٢ للمنحنى $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ أوجد نقطة الدوران التى تكون عظمى ، والتى تكون صغرى .

الاجابة عموما قد نتج من حل المثال ٥ ـ ٢ ـ ١ : أن النقط $(1,0)$ و $(3\ ,\ -4)$ التى تجعل الميل مساويا للصفر للدالة $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$$

عندما $x = 1$ ، $d^2y/dx^2 = -6$ إذن النقطة (١ ، ٠) تكون نقطة دوران عظمى .

عندما $x = 3$ $d^2y/dx^2 = +6$ إذن النقطة (٣ ، ٤-) تكون نقطة دوران صغرى .

مثال ٥ ـ ٢ ـ ٣ أوجد القيمة الصغرى للدالة $y = x^2 - 2x + 4$ باستخدام التفاضل .

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٢)

الاجابة

$dy/dx = 2x - 2 = 0$ عندما $x = 1$.

عندما $x = 1$ اذن $y = 3$ أى أن (١ ، ٣) لها ميل يساوى صفرا .

الآن $d^2y\ /dx^2 = 2$ التى هى دائما موجبة . وعلى ذلك فان القيمة الصغرى للدالة $y = x^2 - 2x + 4$ هى 3 التى تحدث عند $x = 1$.

مثال ٥ ـ ٢ ـ ٤ : باستخدام نوعية خاصة لفترة زمنية معطاه ، فإن التكلفة لكل وحدة انتاج تهبط كلما ارتفع عدد الوحدات المنتجة ، حتى أنه يمكن الوصول الى نقطة عندها تكلفة كلّ وحدة ممكن أن ترتفع بسبب التكلفة الأضافية الناتجة من وقت اضافى مكلف ، وذلك للتعويض بالنسبة للثمن الأصلى .

فإنه يمكن ايجاد العلاقة بين حجم الانتاج والسعر لكل وحدة فى حالة ما يذكر على النحو التالى :

$$\text{تكلفة لكل وحدة (بالجنيهات)} = \frac{840\ 000}{(\text{عدد الوحدات المنتجة})^2} + (\text{عدد الوحدات المنتجة}) \times 2$$

(أ) ارسم شكلا بيانيا موضحا هذه العلاقة للنتائج مبتدئا بـ 40 وحدة وصاعدا بمقدار 10 وحدات الى 120 وحدة .
(ب) أوجد مستوى الانتاج الذى يحوى أقل تكلفة لكل وحدة باستخدام حساب التفاضل .

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٣)

الاجابة : إذا فرضنا عدد الوحدات المنتجة يساوى x والتكلفة لكل وحدة تساوى y اذن نحصل على

$$y = \frac{840\,000}{x^2} + 2x$$

(أ) دعنا نعين بعض النقط على الشكل البيانى .

x	40	50	60	70	80	90	100	110	120
y	605	436	353	311	291	284	284	289	298

نضع هذه النقط ، كما فى الشكل ٥ ـ ٧ ونوصلها للحصول على المنحنى لتوضيح العلاقة بين y و x لجميع قيم x بين 40 و 120 .

(ب) إذا كان

$$y = \frac{840\,000}{x^2} + 2x$$

إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1\,680\,000}{x^3} + 2 = 0$$

بحل هذه المعادلة نحصل على $x = \sqrt[3]{840000} = 94.3$ وهذا ليس بعدد صحيح ، ولكن $y = 283.06$ عندما $x = 94$ و $y = 283.07$ عندما $x = 95$ ، فقد حصلنا على أصغر تكلفة لكل وحدة تحدث عندما $x = 94$ (تأكد من أن d^2y/dx^2 تكون موجبة لجميع قيم x) .

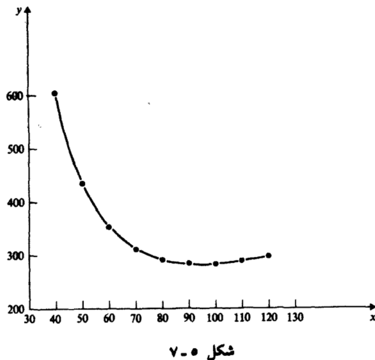
تمرين ٥ ـ ٢ ـ ١ المطلوب ، فى المدى للقيمة من 2 - الى 3 + للمقدار x هو :

(أ) حساب القيم العظمى والصغرى للدالة .

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$$

(ب) ارسم المنحنى الذى معادلته : $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$.

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٥)



شكل ٥ - ٧

٥ - ٣ التطبيقات المالية لحساب التفاضل

يوجد كثير من الحالات فى الأعمال والشئون المالية التى يتغير فيها المتغير بالنسبة لمتغير آخر . ففى نظرية الانتاج ، الناتج يتغير مع تغيرات ساعات عمل العمال ، أو فى نظرية المؤسسة ، تتغير التكلفة ردا على تغيرات الناتج . وهذان مثالان لتحديد كيفية التعبير عن التحاليل الهامشية فى نظرية الاقتصاد . وعلى سبيل المثال : فالانتاج الهامشى يقاس بمعدل التغير للناتج كلما تغير العمال ، والتكلفة الهامشية تقاس بمعدل التغير للتكلفة كلما تغير الناتج . والآن سوف ندرس نظرية المؤسسة بأكثر وضوحا .

افترض أن التكلفة الكلية y لانتاج x وحدة من سلعة معينة تعطى بالدالة .

$$y = C(x)$$

دالة التكلفة الهامشية $MC(x)$ هى ميل دالة التكلفة الكلية ، وعلى سبيل المثال : إذا كانت $C(x) = 500 + 3x^2$ حيث أن x هو الناتج لكل وحدة زمن ، والتكلفة الهامشية هى

$$MC(x) = \frac{d}{dx}[C(x)] = 6x$$

ويوجد دالة هامة أخرى ، وهى دالة متوسط التكلفة ، والتى تعرف على النحو التالى :

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x}$$

مثال ٥ - ٣ - ١ لدالة التكلفة الكلية $C(x) = 50 + 4x + x^2$ أوجد :

١ - التكلفة الثابتة

١ ـ التكلفة الثابتة
٢ ـ التكلفة المتغيرة
٣ ـ التكلفة الهامشية .
٤ ـ متوسط التكلفة .

الاجابة :

١ ـ أولا ، دعنا نتعرف على التكلفة الاجمالية الناتجة من حاصل جمع التكلفة الثابتة والتكلفة المتغيرة ، طبقا للمعادلة التالية .

$C(x)$ = التكلفة الثابتة + التكلفة المتغيرة

التكلفة الثابتة هى تكلفة عدم انتاج أى وحدة ، ولتكن التكلفة الثابتة = 50

٢ ـ التكلفة المتغيرة = $4x + x^2$

٣ ـ التكلفة الهامشية

$$MC(x) = \frac{d}{dx}C(x) = 4 + 2x$$

٤ ـ متوسط التكلفة

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{50}{x} + 4 + x$$

ويمكن ايجاد دوال مشابهة من دالة الايراد الكلى $R(x)$ وتسمى دالة الايراد الهامشى $MR(x) = d[R(x)]/dx$ ودالة متوسط الايراد $AR(x) = R_{(x)}/x$ وتوجد علاقة هامة بين دالة التكلفة الكلية ودالة الطلب . فاذا كان p سعر كل وحدة عندما تكون x هى عدد الوحدات المطلوبة ، نحصل على :

$$R(x) = px$$

حيث أن p دالة لـ x التى تعبر عن الصلة بين السعر لنوعى السلعة ، والكمية المطلوبة وهى عادة تشير الى منحنى الطلب .

والدالة الهامشية للايراد هى معدل التغير فى الايراد بالنسبة الى التغير فى الطلب .

ومن الواضح أن دالة متوسط الايراد مطابقة لـ p أى سعر كل وحدة .

مثال ٥ ـ ٣ ـ ٢ : دالة الطلب لنوع سلعة ما هى $p = 20 - x^2$

حيث أن p السعر لكل وحدة و x عدد الوحدات المطلوبة . أوجد الايراد الكلى والايراد الهامشى ، ودالة متوسط الايراد .

الاجابة :

$$R(x) = px = 20x - x^3$$

$$MR(x) = \frac{d}{dx}[R(x)] = 20 - 3x^2$$

$$AR(x) = \frac{R(x)}{x} = 20 - x^2$$

لاحظ أن دالة الربح $P(x)$ هى الفرق بين الايراد الكلى والتكلفة الكلية ،

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

الهدف الرئيسى لمعظم الشركات هو أن المكسب يجب أن يزيد ، والذى كما هو واضح يتحقق عندما $dp/dx = 0$ و $d^2P/dx^2 < 0$ ويمكن أيضا كتابة هذه النتيجة بالنسبة لدوال الايراد والتكلفة .

$$\frac{d^2R(x)}{dx^2} < \frac{d^2C(x)}{dx^2} \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx}R(x) = \frac{d}{dx}C(x)$$

مثال ٥ - ٣ - ٣ : بين مدى المبيعات من 30 - 80 وحدة ، تحدد الادارة دخل المبيعات بالدالة التالية :

دخل المبيعات (بالجنيهات) = (عدد الوحدات المباعة) × 20 £ - (عدد الوحدات المباعة)٢ × 0.15 £
بينما التكلفة الكلية تتعين بالدالة التالية :

التكلفة الكلية بالجنيهات = 450 £ + (عدد الوحدات المباعة) × 2 £

(أ) باستخدام التفاضل أوجد الناتج الذى يعطى دخلا أكبر مايمكن ، واحسب الربح الأكبر .
(ب) أوجد نقطة تقاطع خطوط الدخل والتكلفة ، أى أن ، النقطة التى عندها لايوجد ربح ولا يوجد خسارة .

(م م ت أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٢)

الاجابة اذا فرضنا أن x تساوى عدد الوحدات المباعة ، إذن

$$R(x) = 20x - \frac{3x^2}{20} \quad \text{and} \quad C(x) = 450 + 2x$$

ويمكن أن ترى هذه الدوال أكثر وضوحا فى شكل ٢ - ٣ .
(أ) الدالة الهامشية للايراد هى :

$MR(x) = 20 - 3x/10 = 0$ ، عند القيمة العظمى .

الايراد يكبر عندما $x = 66⅔$ (أى أن 67) وحدة .

دالة الربح هى

$$P(x) = R(x) - C(x) = \left(20x - \frac{3x^2}{20}\right) - (450 + 2x)$$

$$= 18x - 450 - \frac{3x^2}{20}$$

$\frac{dP(x)}{dx} = 18 - \frac{3x}{10} = 0$ ، عند الربح الأكبر

الربح يكبر عندما $x = 60$ ، وعلى هذا الربح الأكبر هو

$$(18 \times 60) - 450 - \frac{3 \times 60^2}{20} = £90$$

(ب) ولكن الربح يحصل عليه عندما $R(x) = C(x)$ ، أى أن

$$20x - \frac{3x^2}{20} = 450 + 2x$$

أو

$$x^2 - 120x + 3000 = 0$$

القيمة الوحيدة لـ x التى تحقق هذه المعادلة من الدرجة الثانية خلال مدى القيم الحقيقية هى $x = 35.5$.

مثال ٥ - ٣ - ٤ حديثا عين موظف ملم بعلم الاقتصاد الى ادارة مركز لتصنيع الأثاث أمكنه تحديد دوال الايراد الكلى والتكلفة الكلية لانتاج شركة ما لتصنيع أطقم فوتيهات . والدوال هى :

$$R = 200q - 4q^2$$

$$C = 40q + 100$$

R هو العائد الكلى للأسبوع بالجنيهات .

C هى التكلفة الكلية للأسبوع بالجنيهات .

Q هو عدد الفوتيهات المباعة فى الأسبوع .

المطلوب :

(أ) أوجد العائد الكلى الأكبر الذى تستحقه الشركة فى الأسبوع .

(ب) عين الكمية والسعر اللذان يجعلان الربح الأسبوعى أكبر مايمكن ، لانتاج اطقم الفوتيهات .

(جـ) اشرح كيف يتغير السعر الأمثل اذا ارتفعت التكلفة الثابتة الى 150 £ للأسبوع .

(د) عين الفرق فى مستويات الربح اذا كان هدف الشركة هو زيادة الايراد عن زيادة الربح .

(جـ م م- المهنى ٢ - ديسمبر ١٩٧٥)

الاجابة :

(أ) $MR(q) = 200 - 8q = 0$ عندما $q = 25$

$$R(25) = 200 \times 25 - 4 \times 25^2 = 2500$$

الايراد الأكبر فى أسبوع واحد هو 2500 £ .

(ب)

$$P(q) = R(q) - C(q) = 160q - 4q^2 = 100$$

$MP(q) = 160 - 8q = 0$ عندما $q = 20$

الربح يكون كبيرا عندما $q = 20$. كما أن $R(q) = pq$. اذن

$$p = \frac{R(20)}{20} = \frac{2400}{20} = 120$$

أى أن $p = 120$ ، $q = 20$ سوف يزيدان الربح الأسبوعى .

(جـ) اذا زادت التكلفة الثابتة الى 150 فان دالة التكلفة الهامشية لاتتغير ، اذن ، الكمية المفضلة والسعر سوف يظلان كما هما .

(د) المطلوب هو :

$$P(20) - P(25) = 1500 - 1400 = £\ 100$$

المرونة للطلب هى إحدى المفاهيم الهامة فى النظرية الاقتصادية . وأنه فى العادة تقاس الاستجابة للطلب لسلعة ماطبقا لتغير سعرها وعلى هذا الأساس تعرف المرونة بالنحو التالى :

$$\text{مرونة الطلب} = \frac{\text{نسبة التغير فى الطلب}}{\text{نسبة التغير المناظر فى السعر}}$$

$$= \frac{\Delta x/x}{\Delta p/p} = \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot \frac{p}{x}$$

ونقطة المرونة للطلب η هى نهاية هذا المقدار كلما $\Delta p \to 0$ أى أن :

$$\eta = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

ونلاحظ أن مرونة الطلب مستقلة عن الوحدات التى تقاس بالمتغيرات .

مثال ٥ ـ ٣ ـ ٥: يعرف الطلب على الانتاج بالدالة $p = 384 - 2x^2$ حيث x هى الكمية المطلوبة (بالآلاف) و p هى السعر لكل وحدة . عين السعر ، والكمية التى تجعل الايراد أكبر ما يمكن . ثم احسب مرونة الطلب عند هذه الكمية .

الاجابة

$$R(x) = px = 384x - 2x^3$$

$$MR(x) = 384 - 6x^2 = 0 \quad \text{عندما } x = 8$$

الايراد الأكبر يحدث عندما $x = 8$ و $p = 256$ إذن $dp/dx = -4x$ ، إذن

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{1}{dp/dx} = \frac{384 - 2x^2}{x}\left(\frac{1}{-4x}\right) = \frac{1}{2} - \frac{96}{x^2}$$

عندما $x = 8$ ، $\eta = -1$

ويمكننا استنتاج أنه اذا كان السعر يتزايد بمقدار 1% ، فان الكمية المطلوبة تتناقص بحوالى 1% .

مع اننا استعرضنا لبعض التطبيقات على التكلفة والايراد ودالة الربح ، الا أنه هناك مجالات أخرى فى العلاقات الاقتصادية تستخدم فيها الدوال ومشتقاتها . ويمكننا جدولة بعض هذه العلاقات ذات الأهمية فى مجال المال والأعمال .

y f(x)	x	المشتقة dy/dx
تكلفة	ناتج	التكلفة الهامشية
ايراد	ناتج	الايراد الهامشى
ربح	ناتج	المكسب الهامشى
ثروة	زمن	الدخل
رأس المال	زمن	الاستثمار
ناتج	زمن	معدل النمو
ناتج	الحركة العمالية	الانتاجية الهامشية
مستوردات	دخل قوى	الاستعداد الهامشى للاستيراد
مدخرات	دخل قوى	الاستعداد الهامشى للبيع
استهلاك	دخل قوى	الاستعداد الهامشى للاستهلاك

تمرين ٥-٣-١ اذا أعطيت دوال التكلفة الكلية والايراد على النحو التالى :

$$C(x) = 10 + 5x + 0.25x^2$$

و

$$R(x) = 40x - x^2$$

على التوالى ، حيث أن x هى الناتج الكلى :

١ - أوجد الناتج الذى يزيد الربح ، وما هو هذا الربح الأكبر؟

٢ - ماهو متوسط الايراد لكل وحدة بحيث يكون أكبر من متوسط التكلفة لكل وحدةعند مقدار الانتاج الذى يزيد الربح .

تمارين

٥-١ لكل من الدوال الآتية ، على الصورة $y = f(x)$ احسب dy/dx .

(أ) $y = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

(ب) $y = x^{-2} - 1 + x^2$

(جـ) $y = 5x^3 - 4x - 3$.

٥-٢ أوجد :

(أ) قيم x التى عندها $f(x)$ لها نقطة رجوع .

(ب) باستخدام مشتقات الدرجة الثانية ، عين أى من النقط تكون قيم عظمى ، أو صغرى ، عندما

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x$$

● ـ ٣ يدرس مشروع ويؤخذ فى الاعتبار الفروض الآتية (عندما x هى الانتاج الأسبوعى بالآلاف للوحدات) :

$$R(x) = 50x \qquad C(x) = 2x^2 + 200$$

أوجد :

(أ) دالة الايراد الهامشية

(ب) دالة التكلفة الهامشية .

(جـ) دالة الربح الهامشى .

(د) الناتج الذى يرفع الربح .

(هـ) الربح الأعظم .

(و) مدى الناتج الذى يحقق مكسبا .

● ـ ٤ نتيجة للتوسع فى الأعمال بيوتوبيا (Utopia) فى السنوات الحالية ، فقد أنشأت هيئة المنتجات الاقتصادية قسم مبيعات فى يوتوبيا مسئولا عن بيع انتاج جديد . والمكتب الرئيسى والمركز الصناعى مازالا يوجدان فى UK (المملكة المتحدة) .

والمدير المالى للشركة قد أعطى قيمة تقريبية للتكلفة الكلية للصناعة فى UK وتكلفة نقل الانتاج تعطى بالدالة $C = q^2 = 20q + 40$ حيث C تساوى التكلفة الكلية للاسبوع بالجنيهات و q تساوى كمية الانتاج المباع . وهذه التكلفة تظهر فى حسابات قسم التصنيع .

كما أن التكلفة الكلية لقسم التسويق ، فى يوتوبيا ، يمكن أن تعطى بالدالة $C = q^2 + 140q + 200$ والتى تتضمن 100 £ لكل عنصر فى الانتاج ، والتى هى سعر النقل للوحدة مدفوع عن طريق قسم التسويق لقسم التصنيع . وهذا السعر الكلى يظهر فى حسابات قسم التسويق .

علما بأن دالة الايراد لقسم التسويق قد قدرت بالمقدار $R = 500q - 8q^2$ حيث R تساوى الايراد الكلى لكل أسبوع بالجنيهات .

المطلوب : حساب الخطة المثلى باستعمال حساب التفاضل لكل مما يلى :

(أ) قسم التسويق ،

(ب) قسم التصنيع ،

(جـ) الشركة ككل .

(حـ م م ـ المهنى ٢ ـ ديسمبر ١٩٧٧)

الفصل السادس

جمع البيانات

٦ ـ ١ أسباب استخدام العينات

ينبنى جزء كبير من العمل الاحصائى على استخدام « عينة » لاستنباط النتائج عن « المجتمع » الذى سحبت منه ككل ، وفى الواقع فاننا لو فحصنا كل مفردات المجتمع فاننا نكون قد قمنا بما يسمى « بالاحصاء » . وميزة الاحصاء أنه يعطينا فكرة كاملة ومضبوطة عن المجتمع ، ولكنه فى العادة غير عملى ، كما أنه مكلف . ولكى نوضح مزايا الفحص بالعينات أو « المعاينة » سنأخذ المثال التالى :

مثال ٦ ـ ١ ـ ١ لنفرض أننا نريد أن نعرف الأجر المتوسط الذى يحصل عليه الأشخاص البالغون فى مدينة صغيرة . فلماذا يكون أخذ عينة أفضل من بحث كل أفراد المجتمع ؟

الاجابة : هناك عدة أسباب تجعل أخذ عينة أفضل من اجراء تعداد كامل . وفيما يلى نفصل هذه الأسباب .

١ ـ من الواضح أنه أرخص إذا أخذنا جزاءا من المجتمع كعينة من أن نبحث المجتمع كله . والوفر هنا قد ينشأ عن انخفاض تكاليف البريد ، أو تكاليف الانتقال حسب الطريقة التى سيجرى المسح الاحصائى بها .

٢ ـ يستغرق الاحصاء وقتا طويلا . وقد يكون عنصر الوقت هاما اذا كان مطلوبا الحصول على المعلومات بسرعة حتى يمكن اتخاذ القرار فى الوقت المناسب .

٣ ـ فى حالة الاحصاء يكون مطلوبا الحصول على معلومات من كل فرد فى المجتمع . ولكن قد لايكون الحصول على معلومات من كل فرد فى المجتمع ممكنا ، إما لأنه لايمكن الاتصال بكل شخص من العاملين ، وأما ـ وهذا هو الأرجح ـ لأن بعض البالغين قد يرفضون اعطاء المعلومات المطلوبة (اذا أخذت عينة فيجب توخى الحرص الشديد حتى لاتكون منحازة) .

٤ ـ وعلى كل ، فان أهم سبب لاستخدام المعاينة هو أن الدقة التامة عادة لاتكون ضرورية وقد تعطينا عينة صغيرة مايكفى من المعلومات للوصول الى الدقة المطلوبة . وهذا هو الواقع فى كثير من الاحصاءات . وفى بعض الأحيان يمكن القول بأن العينات تعطى معلومات أدق من الأحصاء . وعلى سبيل المثال فاننا لو طلبنا من كاتب للمراجعة أن

يبحث عدد كبيرا جدا من التعاملات المالية فقد يرتكب بعض الأخطاء نتيجة للاجهاد وصعوبة التركيز . وقد يصبح تلافى الأخطاء ممكنا لو قام نفس الكاتب ببحث دقيق لعينة أصغر .

وتسرى الأسباب السابقة لاستخدام المعاينة على معظم حالات المسح الاحصائى .

٦ ـ ٢ طرق اختيار العينة

عندما نختار عينة فاننا نأمل فى أن تكون لها نفس صفات المجتمع المسحوبة منه ، وبالتالى أن تعكس صورة متوازية لهذا المجتمع . وهناك عدة طرق لاختيار العينات ومنها الكثير مما يطبق عمليا . وبصفة عامة يمكن تصنيف طرق اختيار العينات الى قسمين كبيرين :

١ ـ الطرق الاحتمالية لاختيار العينات .
٢ ـ الطرق التقديرية لاختيار العينات .

وفى الاختبار التقديرى للعينات ، فان القائم بالاختيار يحدد مقدما العوامل التى ستحدد ما اذا كان أحد افراد المجتمع سيدخل ضمن العينة أم لا . أما فى الطرق الاحتمالية لاختيار العينات ، فان لكل فرد فرصة معلومة فى أن يكون ضمن العينة . والواقع أن الطرق الاحتمالية للمعاينة هى وحدها التى تسمح لنا بالحصول على تقديرات يكون احتمال خطئها معلوما . وفيما يلى نشرح الطرق الرئيسية للمعاينة الاحتمالية :

(أ) المعاينة العشوائية البسيطة

هذه المعاينة هى النوع الأساسى للمعاينة الاحتمالية ؛ وهى شائعة الاستعمال وسهلة الاستخدام من وجهة النظر الاحصائية . كما أنها تشكل الأساس لعدد من أساليب المعاينة الأكثر تعقيدا .

والصفة المميزة للمعاينة العشوائية البسيطة هى أن كل مجموعة مكونة من n من مفردات المجتمع لها فرصة متساوية فى الاختيار عند سحب العينة وفى العادة ، فان مثل هذه العينات يحصل عليها بسحب عدد من المفردات من المجتمع الواحدة بعد الأخرى دون اعادتها . وهكذا فانه فى كل مرحلة يكون لكل مفردة باقية فى المجتمع نفس احتمال السحب .

ولاتعنى العشوائية أن تسحب العينة كيفما اتفق ؛ وليس كافيا للباحث أن يسحب المفردات « عشوائيا » لأنه قد يظهر تحيزا غير مقصود . وأفضل طريقة لاختيار مفردات العينة هى باستخدام جداول الأرقام العشوائية .

مثال ٦ ـ ٢ ـ١ : هناك ٨٠ شركة مرتبة حسب ارباحها والمطلوب أخذ عينة عشوائية مكونة من عشرين من تلك الشركات ، ولدينا قائمة من الأرقام العشوائية فيما يلى جزء منها :

4 6 8 1 9 0 3 7 1 5 4 5 8 3 5 0 2

والمطلوب

بيان كيفية استخدام هذه القائمة لاختيار عشرين شركة من الشركات الثمانين مع توضيح كيفية اختيار الشركات الثلاث الأولى .

(جـ م م ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٧)

الاجابة : يجب ان يتم اختيار العينة بحيث يكون لكل مفردة فى المجتمع نفس الفرصة لأن تكون ضمنها .

وفى البداية نرقم جميع الشركات بأرقام من 01 الى 80 . ثم نختار نقطة للبداية فى جدول الأرقام العشوائية (فاذا كنا لم نستخدم هذا الجدول من قبل ، فإننا نختار بداية الجدول) . ولما كان عدد الشركات أقل من 100 فإننا نقسم الجدول بحيث تظهر الأرقام أزواجا . ثم نضع علامة على عشرين رقما عشوائيا ، وتكون مفردات المجتمع التى تحمل هذه الأرقام هى مفردات العينة . فإذا ظهر نفس الرقم مرتين نعتبره لاغيا . وبالمثل اذا ظهر رقم أكبر من $N = 80$ يعتبر كذلك لاغيا . وسنستخدم الأرقام العشوائية المعطاه لتوضيح هذه الطريقة .

46	√	
81	x	(تعتبر لاغية)
90	x	(تعتبر لاغية)
37	√	
15	√	
45	√	
83	x	(تعتبر لاغيه)
50	√	

والشركات الثلاث الأولى المختارة هى 46 , 37 و 15 . وعند استخدام الجدول فى المرة التالية نبدأ من الرقم التالى لآخر رقم اخترناه فى المرة السابقة .

(ب) المعاينة المنتظمة

تتوقف الامكانية العملية لتنفيذ خطة معاينة عشوائية بسيطة على حجم المجتمع ، وعلى حجم العينة المطلوبة .

مثال ٦ ـ ٢ ـ ٢: حدد طريقة المعاينة التى تعتبرها مناسبة لاختيار عينة لاجراء المسح التالى ثم قيم الطريقة :

. . . الحصول على معلومات بشأن الحالة الصحية الحالية للعاملين السابقين فى احدى الصناعات والذين أقعدهم عن العمل مرض مشترك . ومن المعروف أن 5000 شخص قد أقعدهم المرض فى الفترة المعينة ، وأن عينة من 250 شخصا تعتبر كافية .

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٢)

الاجابة إذا أردنا استخدام المعاينة العشوائية البسيطة فى هذه الحالة فإننا يجب أن نعد قائمة بأسماء العاملين الذين يبلغ عددهم خمسة آلاف ، وأن نرقمهم ثم نختار 250 رقما من بينهم باستخدام جداول الأرقام العشوائية . ومن الواضح أن هذه العملية متعبة .

وهناك طريقة أخرى وهى حساب k وهى نسبة العدد الكلى للمجتمع إلى عدد العينة المطلوبة أى .

$$k = \frac{5000}{250} = 20.$$

ثم نختار العاملين بمعدل واحد لكل k فردا بادئين بأحدهم نختاره عشوائيا . فاذا كان الفرد الذى اخترناه عشوائيا هو رقم 16 مثلا (وهو أحد الأرقام الواقعة بين 1 و 20) فإن باقى أفراد العينة هم الأرقام ..16, 36, 56, 76 . وتسمى هذه الطريقة

لاختيار العينة « بالمعاينة المنتظمة » . وهذه الطريقة بسيطة وشائعة الاستخدام عمليا . ومع ذلك فانه يجب الحذر عند استخدام هذه الطريقة حتى لاتتفق الأرقام المختارة مع انتظام معين موجود فى القائمة .

(جـ) المعاينة الطبقية

يمكن زيادة دقة نتائج المعاينة بزيادة حجم العينة ، ولكن هذا سيزيد من التكاليف فى نفس الوقت . وهناك طريقة لزيادة الدقة دون زيادة حجم العينة وهى التقسيم الى طبقات . وتضمن هذه الطريقة أن العينة تمثل كل قطاعات المجتمع جيدا .

مثال ٦ ـ ٢ ـ ٣: لنفرض أننا نريد اختيار عينة من 400 موظف من شركة كبيرة ـ نوعا ـ لتحديد موقفهم من نظام جديد لحوافز الانتاج . ونتوقع أن العاملين الرئيسيين الذين سيحددان موقف الموظفين من النظام هما درجة مهارتهم وجنسهم . وتوضيح سجلات الشركة أن موظفى الشركة ينقسمون ، كما يلى :

	ذكور	اناث
مهرة	2400	330
نصف مهرة	1290	660
غير مهرة	300	1020

بين كيف يمكن اختيار العينة لضمان أن تكون ممثلة للمجتمع .

الاجابة : لو أخذنا عينة عشوائية بسيطة (أو عينة منتظمة) من هذا المجتمع ، فقد تبدو غير ممثلة ؛ وعلى سبيل المثال فقد لا يكون هناك نساء فى العينة مع أن عددهن بين العاملين كبير . وكل الذى يمكن أن يقال فى هذه الحالة هو أن عينة غير مرغوبة قد سحبت .

وحتى نجعل العينة أفضل تمثيلا نستخدم المعاينة الطبقية . وتقسيم المجتمع إلى طبقات يعنى ببساطة أنه قبل اختيار العينة يقسم المجتمع الى عدد من الطبقات ثم تؤخذ عينة عشوائية من كل طبقة . فإذا كان عدد المفردات المأخوذة من كل طبقة يتناسب مع عدد مفردات الطبقة تسمى هذه العملية معاينة طبقية متناسبة ، والا فإنها تسمى معاينة طبقية غير متناسبة .

وفى حالة المعاينة الطبقية المتناسبة تكون نسبة العينة ثابتة لكل الطبقات ، أى أن

$$\frac{\text{حجم العينة المأخوذة من طبقة}}{\text{الحجم الكلى للطبقة}} = k \text{ لكل الطبقات}$$

وفى المثال السابق لدينا ست طبقات . فاذا كان المطلوب عينة من 400 من العاملين ، فإن نسبة المعاينة تكون

$$\frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع}} = \frac{400}{6000} = \frac{1}{15}$$

وبالتالى فإننا نحتاج لعينة من كل طبقة حجمها هو 15 / 1 من حجم الطبقة . وعلى سبيل المثال ، فإننا نأخذ عينة من طبقة الذكور المهرة حجمها هو 160 = 15 / 2400 وبنفس الطريقة نحصل على حجم العينة لكل طبقة ، كما يلى :

	ذكور	اناث
مهرة	160	22
نصف مهرة	86	44
غير مهرة	20	68

ويجب أن نؤكد على اختيار العينات من كل طبقة عشوائيا . وهى تختلف بذلك عن المعاينة بالحصة النسبية التى سنضعها فيما بعد . وتستخدم طريقة المعاينة الطبقية العشوائية كثيرا فى الحياة العملية . ويفضل أن يقسم المجتمع إلى طبقات على أساس عوامل متصلة بالموضوع الجارى بحثه . وعلى سبيل المثال : إذا كان مطلوبا معرفة رأى الناس فى الحكومة بواسطة استقصاء الرأى فى المنازل ، فيجب التأكد من استقصاء بعض الآراء فى المناطق المعروفة بانتمائها لحزب المحافظين ، واستقصاء البعض الآخر فى المناطق المعروفة بإنتمائها لحزب العمال .

(د) المعاينة العنقودية

المعاينة العنقودية هى طريقة لاتختار المفرادت فيها منفصلة ، وإنما فى مجموعات (أو عناقيد) .

مثال ٦ ـ ٢ ـ ٤: حدد طريقة المعاينة التى تعتبرها مناسبة لاجراء المسح التالى . ثم قيم الطريقة :

. . . لمعاونة مجلس مدينة تعتبر من المصايف المحبوبة بشأن حملة دعاية مقترحة للمصيف بتزويده بالمعلومات عن أماكن الإقامة المتاحة للزوار والسياح خلال الموسم القادم .

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٢)

الاجابة : لنفرض أن بالمدينة 000 10 مسكن مسجلة فى سجلات مناسبة وأنه مطلوب اختيار عينة من 500 . فإذا اخترنا 500 مسكنا طبقا لطريقة معاينة عشوائية بسيطة ، فإن جمع المعلومات سيكون صعبا لأن هذه المساكن ستكون غالبا مبعثرة على مساحة المدينة كلها . ولاشك أنه سيكون من الأنسب أن تكون المساكن الخمسمائة مركزة فى مناطق معينة بالمدينة . لذا تقسم المدينة إلى 1000 منطقة بكل منطقة 10 مساكن ، ثم نختار عشوائيا 50 منطقة من المناطق الألف ، ونجمع المعلومات عن كل المساكن بالمناطق المختارة وبهذه الطريقة يمكن تخفيض الوقت والتكاليف اللازمة .

ومن المفيد عند استخدام المعاينة العنقودية أن تكون المفردات لكل من العناقيد (أو التجمعات) مختلفة ، فاذا كانت المفردات التى عددها n فى كل من العناقيد التى عددها m مختلفة ، فإننا نحصل على عينة حجمها $n \times m$ من المفردات . وبالعكس اذا كانت مفردات كل عنقود متشابهة ، فاننا نحصل عمليا على عينة مكونة من m من المفردات المختلفة فقط .

وتستخدم المعاينة العنقودية لأنها تحتاج الى جهد ادارى أقل ، كما أنها أقل تكاليف من أنواع المعاينات الأخرى . ومن الأسباب الهامة لاستخدام المعاينة العنقودية هى أنه قد لا يكون هناك بديل آخر . ومن الأمثلة التقليدية لذلك حالة أخذ عينة كبيرة من العمال فى صناعة معينة . ومن المتوقع فى هذه الحالة أننا نستطيع الحصول على قائمة بأصحاب المصانع ، ولكننا لا نستطيع الحصول على قائمة بأسماء العاملين بتلك المصانع وفى مثل هذه الحالة فإن الطريقة الوحيدة لأخذ العينة هى باختيار عدد من المصانع عشوائيا ، ثم الاتصال بالعاملين بها .

(هـ) المعاينة متعددة المراحل

فى العادة يكون مطلوبا فى بحوث السوق أن نحصل على نتاج عن البلاد ككل . وهذا يعنى أن المجتمع الذى يهمنا على درجة من الكبر والانتشار . وبالطبع فإن السفر إلى كل أنحاء البلاد عملية مرهقة ومكلفة ، ولذلك فمن الأنسب أن تكون العينة مقصورة على أجزاء معينة من البلاد . ويمكن تحقيق ذلك باستعمال المعاينة متعددة المراحل كما سنوضحها فى المثال التالى :

مثال ٦ ـ ٢ ـ ٥: حدد طريقة المعاينة التى تعتبرها مناسبة لاجراء المسح التالى ، ثم قيم الطريقة :

. . . التأكد بصفة عاجلة من عدد قراء مجلة أسبوعية مخصصة أساسا للبرامج التفصيلية للراديو والتليفزيون مع بعض المقالات عن البرامج والفنانين .

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٢)

الاجابة : المجتمع الذى يهمنا هنا هو كل الأسر فى البلاد . ولاشك أنه من المكلف جدا أخذ عينة عشوائية من كل الأسر ، كما أن هذا يستغرق وقتا طويلا جدا . ومن المنطقى فى هذه الحالة أن نستخدم أسلوبا موسعا من طريقة المعاينة العنقودية كما يلى :

فى البداية نختار عينة عشوائية من الأقاليم (مثل كنت ودورست وستافورد شاير) . ثم نقسم كل أقليم من الأقاليم المختارة إلى عدد من المناطق التى تختار منها العينات عشوائيا.ويمكن بعد ذلك تقسيم المناطق إلى وحدات أصغر (كالشوارع مثلا) وتختار العينات منها عشوائيا وتستمر العملية على مراحل بالعدد اللازم . وفى كل مرحلة نختار عشوائيا ثلاث أو أربع مفردات حتى نصل فى النهاية الى عدد من الأسر ليست معزولة بدرجة كبيرة عن باقى الأسر فى العينة . وتسمى هذه الطريقة بالمعاينة العنقودية متعددة المراحل .

والآن سنتناول باختصار طرق المعاينة التقديرية . والعيب الرئيسى لهذا النوع من المعاينة هو أننا لا نستطيع الحصول على تقدير لدقة النتائج . ومن طرق المعاينة التى تدخل ضمن طرق المعاينة التقديرية الطريقة التالية :

(و) معاينة الحصة النسبية

هذه الطريقة للمعاينة متصلة اتصالا وثيقا بالمعاينة الطبقية العشوائية وتستعمل على نطاق واسع فى كل من بحوث الرأى العام وبحوث السوق . وتختلف هذه الطريقة عن المعاينة العشوائية فى أن العينات لا تختار عشوائيا من الطبقات . وفى العادة فان الطبقات تحدد ثم تحسب احجام العينات الطبقية اللازمة للمحافظة على التناسب بمعلومية الحجم الكلى للطبقات فى المجتمع . وبعد ذلك يترك الاختيار الفعلى للمفردات فى كل طبقة لتقدير الباحثين .

مثال ٦ ـ ٢ ـ ٦: يبين الجدول التالى تقسيم مجتمع ما الى نوعيات حسب الجنس والعمر وحسب كون الفرد مدخنا ، أو غير مدخن (والتكرار المعطى بالآلاف) .

		العمر		
		21–40	أكثر من 40	الاجمالى
ذكور	مدخن	61	45	106
	غير مدخن	41	27	68
إناث	مدخنة	68	56	124
	غير مدخنة	59	43	102

والمطلوب

١ - تكوين عينة بالحصة النسبية من 100 فرد بحيث تعكس جيدا توزيع هذه الخصائص الثلاث فى المجتمع . احسب الأعداد المطلوبة فى كل نوعية من نوعيات العينة .
٢ - اذا فرضنا أن العمر ليس هاما لهذه الدراسة ، فكيف يتأثر تركيب العينة فى هذه الحالة ؟
٣ - ما هو النقد الأساسى الذى يمكن أن يوجه الى المعاينة بالحصة النسبية ؟

(ج م م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٧)

الاجابة

١ - نستطيع أن نعكس صورة المجتمع جيدا اذا أخذنا عينة يكون عدد الأفراد بها متناسبا مع عددهم فى كل نوعية . ولما كان حجم المجتمع هو 000 400 فإن نسبة العينة 4000 / 1 = 000 400 / 100 وبعد التقريب لأقرب عدد صحيح نحصل على التوزيع التالى لأفراد العينة على النوعيات المختلفة .

	العمر	
	أكثر من 40	21–40
ذكور مدخنون	11	15
ذكور غير مدخنين	7	10
إناث مدخنات	14	17
إناث غير مدخنات	11	15

وبعد ذلك تبدأ جمع المعلومات باعطاء التعليمات للبحاث لاستيفاء الحصص المقررة لكل نوعية . والمنتظر عندئذ أن كل باحث سيحاول قرع أبواب السكان ، أو سؤال المارة فى الشوارع الرئيسية حتى يحصل على عدد الاجابات المطلوبة لكل نوعية .

٢ - اما اذا لم تكن للعمر أية أهمية فاننا نجمع العمودين الموجودين بالجدول لنحصل على :

ذكور مدخنون	26
ذكور غير مدخنين	17
إناث مدخنات	31
إناث غير مدخنات	26

٣ - من وجهة النظر المتعلقة بنظرية الاحتمالات ، فإن عدم عشوائية المعاينة بالحصة النسبية تعد نقطة ضعف خطيرة . والعينات التى تختار بهذه الطريقة معرضه لخطر التشوه . ويرى بعض الخبراء أن الأنحياز الناتج فى هذه الحالة يجعل هذه الطريقة من طرق المعاينة عديمة الفائدة . ومع ذلك فيجب أن نشير إلى أن كثيرا من باحثى السوق والاداريين الذين يقومون عمليا بإجراء الدراسات الاحصائية يؤيدون هذه الطريقة لما تمتاز به من بساطة ورخص وسرعة .

تمرين ٦ - ٢ - ١: اكتب مذكرات مختصرة توضح معنى كل من المصطلحات التالية :

(أ) المعاينة العشوائية .
(ب) المعاينة الطبقية .
(جـ) المعاينة بالحصة النسبية .
(د) المعاينة المنتظمة .

٦ ـ ٣ الاستقصاءات

من العوامل الهامة التى تلعب دورا كبيرا عند اجراء دراسة احصائية طريقة جمع البيانات وتصميم الاستقصاءات . وسنوضح عن طريق المثال التالى الكثير عن هذين العاملين .

مثال ٦ ـ ٣ ـ ١

(أ) الاستقصاءات البريدية والمقابلات طريقتان لجمع البيانات . اذكر مزايا كل طريقة .
(ب) أحد العيوب الأساسية للمسح الاحصائى بواسطة المقابلات هو فى انحياز القائم بالمقابلة . ما هو هذا الانحياز ، وكيف يمكن تقليله الى الحد الأدنى ؟
(جـ) ما هى العناصر الأساسية التى يجب اعتبارها عند تصميم استقصاء بريدى ؟
(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٥)

الاجابة :

(أ) ان عدم كفاءة طرق جمع البيانات تقلل كثيرا من قيمة أى مسطح احصائى . والطريقتان الرئيسيتان لجمع البيانات لهذا الغرض هما الاستقصاء البريدى والمقابلات . ولكل من هاتين الطريقتين مزاياه ويتوقف استعمال احدى الطريقتين على ظروف المسح .

والاستقصاء البريدى أرخص كثيرا فى التنفيذ من المقابلات الشخصية وقد يكون انخفاض التكاليف هو العنصر الحاسم الذى يجعلنا نفضل الاستقصاء البريدى فى كثير من المواقف ، وخاصة عندما تكون الميزانية محدودة ، أو عندما يكون المجتمع مبعثرا على نطاق واسع . ومن جهة أخرى يمكن زيادة حجم العينة لجعل النتائج أكثر وثوقا . وبالاضافة الى كون الاستقصاء البريدى أرخص ، فانه كذلك يسمح بجمع البيانات بسرعة معقولة . ويمكن عادة أن نتوقع وصول معظم الردود خلال أسبوعين من ارسال الاستقصاء . وللاستقصاء ميزة اضافية ، وهى عدم وجود مقابلة شخصية قد تؤثر على اجابة الأشخاص الذين يردون على الاستقصاء . ومن المعلوم أن طريقة طرح السؤال قد تؤثر على الاجابة .

والمشكلة الرئيسية للاستقصاء البريدى هى صعوبة الحصول على معدل معقول للردود . ويعتبر الحصول على ردود بنسبة عشرين فى المائة جيدا بالنسبة للاستقصاءات البريدية . وليست مشكلة انخفاض معدل الرد راجعة الى قلة البيانات بقدر ما ترجع الى أن الأشخاص الذين لا يردون على الاستقصاء قد يكونوا غير ممثلين للمجتمع مما يجعل النتائج منحازة .

والميزة الأساسية للمقابلة الشخصية هى أنها تعطى عادة معدلا عاليا للرد . ويبدو أنه أسهل أن يمتنع الناس عن الرد على استقصاء بريدى من أن يرفضوا المقابلة الشخصية وبالاضافة الى ذلك ، فان وجود القائم بالمقابلة الشخصية يساعد الشخص الذى يتولى الاجابة على توضيح أى غموض بالأسئلة .

والعيب الرئيسى فى طريقة المقابلة الشخصية هو ارتفاع تكاليفها . ويرجع هذا ليس فقط الى أجور وبدلات سفر القائمين بالمقابلة ، وانما أيضا الى تكاليف تدريبهم .

(ب) عند جمع البيانات بطريقة المقابلة الشخصية يمكن أن ينشأ الانحياز من مصدرين . فاذا كان الانحياز صادرا عن الشخص الذى يجيب فانه يكون عادة ناتجا عن نقص فى معلوماته ، أو ضعف فى ذاكرته ، وقد يكون ناتجا عن عدم رغبته فى اعطاء اجابة صحيحة . وبالاضافة الى ذلك فان القائم بالمقابلة يمكن أن يؤثر على الاجابة .

ومن الضرورى أن يوجه القائم بالمقابلة الأسئلة بطريقة محايدة وألا يطرحها بطريقة تجعل الشخص الذى يجيب يحس بأنه يجب أن يعطى اجابة معينة . وهناك صورة أخرى لانحياز القائم بالمقابلة تظهر فى تدوينه للاجابات الحدية . فقد يحدث أن اجابة لأحد الأشخاص لا تقع بوضوح فى إحدى النوعيات المذكورة فى الاستقصاء وعندئذ يستخدم القائم بالمقابلة تقديره الشخصى لوضعها باحدى النوعيات .

وهناك طريقتان أساسيتان لاستبعاد انحياز القائم بالمقابلة . والطريقة الأولى هى أن تجعل القائمين بالمقابلة يشتركون فى برنامج تدريبى مخطط . وفى هذا البرنامج يمكن تدريبهم على تكوين علاقة طيبة مع الأشخاص الذين يجيبون على الاستقصاء ، وعلى توجيه الأسئلة بطريقة لطيفة ، ولكنها محايدة ، وعلى مواجهة العقبات التى قد تصادفهم . والطريقة الثانية ، لتقليل انحياز القائم بالمقابلة هى بصياغة الأسئلة بطريقة تستبعد الغموض تماما .

(جـ) قبل بحث موضوع تصميم نماذج الاستقصاء يجدر بنا أن نتناول بعض المواضيع الجانبية المتصلة بالاستقصاءات البريدية . وأولا يجب أن يكون هناك خطاب مرفق بنموذج الاستقصاء يوضح الغرض من اجراء المسح الاحصائى ، ويطمئن المجيبين على الاستقصاء على بقاء هويتهم مجهولة . وبالاضافة الى ذلك يجب أن يتضمن الخطاب مظروفا معنونا ، وعليه طابع بريد للرد فضلا عن مكافأة ما فى مقابل الرد ، وليس ضروريا أن تكون هذه المكافأة فى صورة نقود . بل يمكن أن تكون فى شكل هدية رخيصة كقلم مثلا ، أو تذكرة للاشتراك فى مسابقة للحصول على جوائز قيمة . ويقصد بهذه الجوانب أن تحقق أعلى معدل ممكن للرد .

أما بالنسبة للاستقصاء البريدى ذاته ، فيجب أن يعمم بأوضح صورة ممكنة مع استخدام الحروف الكبيرة والطباعة ببنط أسود لابراز الكلمات والتعليمات الهامة . ويجب أن تكون الأسئلة مصاغة بحيث تسهل الأجابة عليها ، وأن يكون عدد الأسئلة أقل ما يمكن .

ويجب مراعاة النقاط التالية عند صياغة الأسئلة :

١ ـ يجب أن تكون اللغة المستخدمة واضحة ودقيقة ، وأن يستطيع أى شخص من الذين سيجيبون على الاستقصاء فهمها . وعلى سبيل المثال : يفضل استخدام كلمة « يقول » بدلا من « يخبر » و « يصرف » بدلا من « ينفق » وهكذا .

٢ ـ يجب أن يتجنب كاتب الاستقصاء توجيه الأشخاص الذين سيجبون عليه وجهة معينة فى الاجابة كأن يقول « ألا تظن أن . . . ؟ » .

٣ ـ يجب عدم الاعتماد على ذاكرة الشخص الذى يجيب على الاستقصاء أكثر من اللازم . فعند توجيه سؤال مثل « كم من المال صرفت على الطعام فى الأسبوع الماضى ؟ » يمكن أن نتوقع اجابة دقيقة الى حد ما . أما اذا كان السؤال هو « كم من المال صرفت فى أسبوع مناظر فى العام الماضى ؟ » فان الاجابة لن تكون ذات قيمة .

٤ ـ استخدام الأسئلة ذات الاجابات المصنفة سلفا مريح للشخص الذى يجيب على الأسئلة . وعلى سبيل المثال :

كم عدد الموظفين لديك ؟ ضع علامة فى المربع المناسب .

أقل من 100	من 101 الى 500	أكثر من 500
☐	☐	☐

كما أن الاجابات المصنفة سلفا تجعل التحليل أكثر يسرا .

تمارين :

٦ ـ ١ شركة صناعية كبرى ترغب فى اجراء مسح احصائى للعاملين بها الذين يتلقون أجورهم بالساعة مع توضيح بعض الجوانب بصفة خاصة مثل شكل الأسرة ، وظروف السكن ، والالتزامات المالية . ويفرض أن كل نشاطات الشركة مركزة فى منطقة جغرافية واحدة :

(أ) صمم نظاما للمسح بالعينة على اسس عينة عشوائية بسيطة للحصول على المعلومات اللازمة .

(ب) كيف تحدد الحجم المناسب للعينة لهذا الغرض ؟

(جـ) ما مزايا وعيوب مثل هذا المسح بالعينة بالمقارنة باحصاء كامل ؟

(م أ أ ـ الجزء الأول ـ يونيو ١٩٧٤)

الفصل السابع

وصف البيانات الاحصائية

٧ ـ ١ التوزيعات التكرارية

من المهام الرئيسية التى يتضمنها العمل الاحصائى أخذ مجموعة من البيانات ومعالجتها بحيث تصبح خصائصها الرئيسية واضحة جلية . وهناك عدة جوانب لهذه المعالجة منها العددى ومنها المتصل بالرسم البيانى .

جداول التكرار: أبسط صورة يمكن أن تصادفنا فيها البيانات هى أن تكون بشكل مجموعة من الأعداد . ولذلك سنبدأ باعتبار مجموعة من الأعداد لنرى الخطوات الأولى للمعالجة الاحصائية . وفيما يلى قيم عروض الأسعار التى تقدمت بها شركة ما فى يوم من الأيام .

£	£	£	£	£	£	£	£	£	£
17.35	6.80	9.05	14.80	24.70	23.45	29.90	9.95	15.90	22.40
16.45	11.50	17.55	18.60	9.40	13.35	26.60	6.65	10.25	19.00
23.95	18.45	12.70	19.05	15.15	18.30	15.16	12.80	23.40	5.55
8.75	18.80	20.45	15.80	22.50	19.10	14.55	11.15	16.35	26.60

وعندما ينظر القارىء العادى الى مجموعة من 40 عددا مكتوبة بهذه الطريقة فإنها لا تعطيه أى أنطباع مفيد .

وأول خطوة تتخذ لجعل هذه الأعداد أكثر قابلية للعرض على شخص ما هى بتحويلها الى صورة جدول للتكرار . وهذا يعنى تقسيم المدى الذى تعطيه البيانات إلى عدة فترات أو فئات وعد قيم البيانات التى تقع فى كل فئة . ويسمى هذا العدد بالتكرار الفئوى .

والبيانات المعطاه هنا تتراوح من £5.55 الى £29.90 ، ومن الواضح أن هناك طرقا عديدة لتقسيم هذا المدى إلى فئات . كما أنه لا يوجد إجماع على طريقة موحدة لتحديد الفئات . ولنعتبر التقسيم التالى ، وهو أسلوب شائع الاستخدام .

الفئة
2 £ وأقل من 6 £
6 £ وأقل من £10
£10 وأقل من £14
£14 وأقل من £18
£18 وأقل من £22
£22 وأقل من £26
£26 وأقل من £30

وبالنسبة للفئات المحددة بهذه الطريقة ، فان القيم المذكورة على اليسار ، وهى £2,£6,£10,£14,£18,£22 و £26 تسمى الحدود الدنيا للفئات أما القيم المذكورة على اليمين فتسمى الحدود العليا للفئات .

والواقع أن هذا التقسيم للفئات يجعلنا نطرح الأسئلة التالية :

١ ـ لماذا سبع فئات ؟

٢ ـ لماذا كانت الفئات جميعا متساوية فى الحجم ؟

وفيما يتعلق بالسؤال الأول ، فإنه لا توجد قاعدة ثابتة بشأن عدد الفئات التى يجب استخدامها ، ولكن المعتاد ألا تقل عن خمس ، وألا تزيد عن خمس عشرة . إذ أن استخدام أقل من خمس فئات لا يعطى تمييزا كافيا ، أما استخدام أكثر من خمس عشرة فئة ، فإنه يؤدى إلى صعوبة فى الاستيعاب ، وبذلك يفقد الجدول التكرارى السبب فى وجوده .

أما بالنسبة للسؤال الثانى ، فإن جعل الفئات متساوية فى الحجم يسهل الخطوات التالية كما سنرى فيما بعد . وليس عمليا بالنسبة لبعض البيانات أن تكون كل الفئات متساوية فى الحجم ، ولكننا سنتناول هنا الحالات التى تكون الفئات فيها متساوية فقط .

وهناك مصطلحان إضافيان يجب أن يتعلمهما القارىء فى هذه المرحلة وهما :

(أ) طول الفئة ، وهو الفرق بين حدها الأعلى وحدها الأدنى .

(ب) مركز الفئة ، وهو القيمة الواقعة فى المنتصف بين الحد الأعلى والحد الأدنى للفئة .

وبعد أن انتهينا من التقسيم الى فئات نقوم بعد البيانات الواقعة فى كل منها . والطريقة المعتادة لاجراء ذلك هى أن يكون لدينا عمود فى الجدول مجاور لعمود الفئات ويعنون هذا العمود باسم « علامات العد » ثم نتناول الأرقام الواردة بالبيانات الأصلية واحدا تلو الآخر ، فنشطب الرقم ونضع علامة مقابلة له فى عمود علامات العد فى الفئة التى يندرج تحتها ، ومن المفيد لتسهيل العد أن نستخدم طريقة البوابة ذات الخمسة قضبان وفيها نضع رقم (1) أو شرطة رأسية لكل مرة يقع فيها الرقم فى الفئة حتى اذا وضعنا أربعة شرطات وجاء دور الخامسة توضع شرطة مائلة تقطع الأربعة السابقة . ويكون عدد علامات العد المسجل مقابلا كل فئة هو تكرار الفئة . وبالنسبة للمثال المعنى يكون لدينا

التكرار	علامات العد	الفئة
1	1	2 £ وأقل من 6 £
6	~~1111~~ 1	£6 وأقل من £10
6	~~1111~~ 1	£10 وأقل من £14
10	~~1111~~ ~~1111~~	£14 وأقل من £18
8	~~1111~~ 111	£18 وأقل من £22
6	~~1111~~ 1	£22 وأقل من £26
3	111	£26 وأقل من £30

وهذا عبارة عن جدول للتكرار للبيانات المعطاه .

وقبل أن نترك موضوع الجداول التكرارية سنتناول ما يسمى بجدول التكرار المتجمع . وللحصول عليه نعيد ترتيب الفئات فى جدول التكرار العادى . وبالنسبة للمثال المطروح كانت لدينا فئات هى £2 وأقل من £6,£6 وأقل من £10, £10 وأقل من £14, £14 وأقل من £18 وهكذا .

وللحصول على جدول التكرار المتجمع المقابل نأخذ الفترات التالية : أقل من £6 أقل من £10 ، أقل من £14 ، أقل من £18 وهكذا .

وسيكون عدد البيانات أقل من £6 هو نفس عددها فى الفئة £2 وأقل من £6 ، وعدد البيانات أقل من £10 هو مجموع العددين فى الفئة £2 وأقل من £6 والفئة £6 وأقل من £10 وهكذا

وهكذا ، فإننا نحصل على تكرارات جدول التكرار المتجمع بتجميع التكرارات الواردة فى جدول التكرار العادى . وبالنسبة للمثال المذكور يكون لدينا جدول التكرار المتجمع التالى :

التكرار	المدى
1	أقل من £ 6
7	أقل من £10
13	أقل من £14
23	أقل من £18
31	أقل من £22
37	أقل من £26
40	أقل من £30

وبتحديد أكثر نقول أن هذا جدول للتكرار المتجمع من النوع « أقل من » ويمكن الحصول على نوع ثان من جداول التكرار المتجمع بتجميع التكرارات بدءا من نهاية الجدول ، وصعودا الى أعلى :

التكرار	المدى
40	£ 2 أو أكثر
39	£ 6 أو أكثر
33	£10 أو أكثر
27	£14 أو أكثر
17	£18 أو أكثر
9	£22 أو أكثر
3	£26 أو أكثر

وهذا جدول للتكرار المتجمع من النوع « أو أكثر » . وهذا النوع أقل شيوعا بكثير من النوع « أقل من » ولهذا يستخدم مصطلح جدول التكرار المتجمع ليدل على النوع « أقل من » دون لبس .

وأحيانا يكون هاما أن نكون جدولا للنسبة المئوية للتكرار . ويتم ذلك بتحويل التكرارات المعطاه فى جدول التكرار العادى وتسمى أحيانا بالتكرارات الخام الى نسب مئوية من التكرار الكلى باستخدام القاعدة .

$$\text{النسبة المئوية للتكرار} = \frac{\text{التكرار الخام}}{\text{التكرار الكلى}} \times 100$$

وتحويل التكرار الأول فى المثال بهذه الطريقة يعطى $1/40 \times 100 = 2.5\%$ ويعطى تحويل التكرار الثانى $6/40 \times 100 = 15\%$ وفيما يلى جدول النسبة المئوية للتكرار كاملا :

النسبة المئوية للتكرار	الفئة
2.5	£ 2 وأقل من £ 6
15	£ 6 وأقل من £10
15	£10 وأقل من £14
25	£14 وأقل من £18
20	£18 وأقل من £22
15	£22 وأقل من £62
7.5	£26 وأقل من £30

وتسهل النسب المئوية للتكرار من مقارنة الجداول المختلفة اذا كانت التكرارات الكلية مختلفة .

ويمكن الحصول على جدول للنسب المئوية المتجمعة للتكرار اما بتجميع النسب المئوية للتكرار ، وما بتحويل التكرارات المتجمعة إلى نسب مئوية من التكرار الكلى . وبالنسبة للمثال المعطى أعلاه ، فإن جدول النسب المئوية المتجمعة للتكرار من النوع « أقل من » يكون كما يلى :

المدى	النسبة المئوية المتجمعة للتكرار
أقل من 6 £	2.5
أقل من £10	17.5
أقل من £14	32.5
أقل من £18	57.5
أقل من £22	77.5
أقل من £26	92.5
أقل من £30	100

تمرين ٧ ـ ١ ـ ١ الأعداد الآتية ـ وهى مأخوذة عن الملخص الشهرى للاحصاء تبين كميات الخشب الجاف المستوردة لبريطانيا على مدى أربعين شهرا . والكميات معطاه بآلاف الأمتار المكعبة .

79	88	81	94	84	102	92	85	72	95
72	76	97	86	81	94	88	82	78	93
77	67	93	82	91	84	87	95	71	87
89	99	88	85	103	98	107	66	87	86

با ستخدام الفئات "65 وأقل من 70" ، "70 وأقل من 75" وهكذا جمع هذه البيانات لتكون جدولا تكراريا ، وجدولا للتكرار المتجمع ، وجدولا للنسب المئوية للتكرار وجدولا للنسب المئوية المتجمعة للتكرار .

٧ ـ ٢ التمثيل البيانى للتوزيع التكرارى

اذا نظرنا الى جدول توزيع تكرارى ، فإننا نحصل على فكرة أفضل عن مجموعة البيانات عما اذا كانت على شكل مجموعة أعداد. ولذلك فمن المفيد أن نعلم كيف يمكن تحويل مجموعة من الأعداد إلى جدول تكرارى .

ومع ذلك ، فإننا كثيرا ما نحصل على المعلومات فى صورة جدول تكرارى من البداية والمطلوب أن نعرف ماذا يمكن عمله بعد ذلك .

ومع أن الجدول التكرارى أسهل فى الاستيعاب من عدد من الأعداد إلا أنه لا يعطى انطباعا واضحاً مثل الرسم . ولذلك سنتناول فى هذا الجزء الخطوة التالية فى عرض البيانات وهى انشاء رسومات بيانية من الجداول التكرارية .

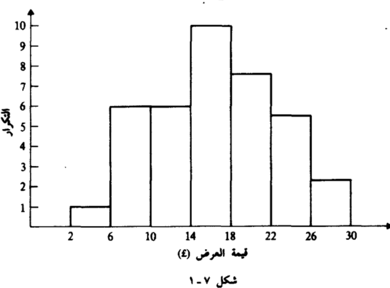
ولتوضيح ذلك فسنتناول فى هذا الجزء رسومات بيانية مبينة على الجداول التكرارية التى درسناها سابقا لبيانات عروض الأسعار .

المدرجات التكرارية : المدرج التكرارى عبارة عن رسم بيانى مكون من مستطيلات كل منها يمثل واحدة من الفئات التى تنقسم البيانات إليها .

ويمكن أن نعتبر أن عرض المستطيل يتناسب مع طول الفئة التى يمثلها ، وأن مساحته تتناسب مع تكرار الفئة .

ولو كانت كل الفئات بنفس الطول (وهى الحالة التى سنتناولها حاليا) فإن الأمور تكون أبسط كثيرا . وفى هذه الحالة ، فإن التعريف السابق يعنى أن كل المستطيلات تكون بنفس العرض (الاختيارى) وتكون أطوالها متناسبة مع تكرار الفئات . وهكذا فبالنسبة لمثال عروض الأسعار يكون لدينا المدرج الموضح بشكل ٧ ـ ١ .

ويعطى المدرج التكرارى انطباعا سريعا عن موقف البيانات التى يمثلها .



شكل ٧ ـ ١

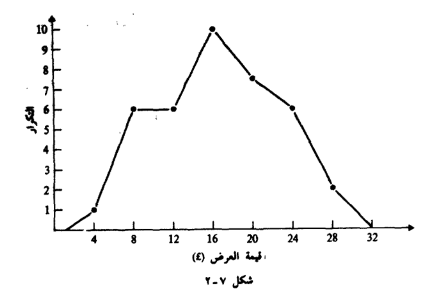
المضلعات التكرارية : ترسم المضلعات التكرارية عامة بتوقيع « التكرار لكل وحدة من طول الفئة » مقابل « مركز الفئة » ، وذلك لكل فئة من فئات الجدول .

وبالنسبة للحالات التى تكون فيها كل الفئات بطول واحد ، فإن هذا يعنى توقيع تكرار الفئة مقابل مركز الفئة . ويستكمل شكل المضلع بتوصيل النقطتين الموقعتين عند الطرفين بالمحور الأفقى على مسافة تبعد بمقدار طول فئة واحدة .

وبالنسبة لمثال عروض الأسعار يكون لدينا المضلع المبين بشكل (٧ ـ ٢) .

ونلاحظ أن النقط الموقعة للحصول على المضلع التكرارى هى منتصفات الأضلاع العلوية للمستطيلات المكونة للمدرج التكرارى المقابل . ويظل هذا صحيحا حتى فى الحالة العامة التى لا تكون أطوال الفئات فيها متساوية .

ويعطى المضلع التكرارى ـ مثله فى ذلك مثل المدرج التكرارى ـ انطباعا فوريا عن صورة البيانات التى يمثلها .



شكل ٧-٢

مضلعات الأوجيف : هذه الرسومات البيانية ليست ذات فائدة كبيرة لاعطاء انطباع بصرى فورى عن مجموعة البيانات المدروسة ، ولكن لها قيمة كبيرة للمراحل التالية للاحصاء الوصفى كما سنرى فى الفصل الثامن . ولتوضيح طريقة انشاء هذا المضلع سنعتبر المثال التالى :

عينة عشوائية من حسابات خمسين شركة للانشاءات أعطت التوزيع التكرارى التالى عن الأرباح لعام ١٩٧٣/١٩٧٤ .

الربح (مليون £)	عدد الشركات
10- وأقل من 5-	2
5- وأقل من 0	0
0 وأقل من 5	2
5 وأقل من 10	4
10 وأقل من 15	8
15 وأقل من 20	11
20 وأقل من 25	13
25 وأقل من 30	6
30 وأقل من 35	4

(البيانات مأخوذة من ج م م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٥)

وأول خطوة لأنشاء مضلع الأوجيف لهذا التوزيع التكرارى هى تحويله الى جدول للتكرار المتجمع . وسيكون لدينا عندئذ .

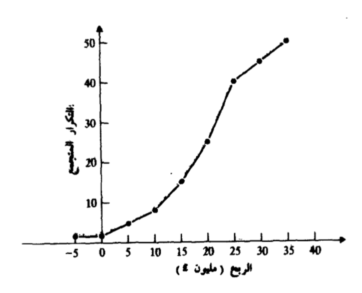
الربح (مليون £)	التكرار
أقل من 5-	2
أقل من 0	2
أقل من 5	4
أقل من 10	8
أقل من 15	16
أقل من 20	27
أقل من 25	40
أقل من 30	46
أقل من 35	50

ونحصل على مضلع الأوجيف من هذا الجدول بتوقيع التكرار المتجمع مقابل حد الفئة ، وتوصيل النقط بخطوط مستقيمة . والأوجيف الناتج موضح بشكل (٧-٣)

تمرين ٧-٢-١ صور البيانات التالية بيانيا بواسطة مدرج تكرارى ، ومضلع تكرارى ، ومضلع للتكرار المتجمع (أوجيف) .

الأجر الأسبوعى (£)	عدد العاملين
31 وأقل من 36	6
36 وأقل من 41	8
41 وأقل من 46	12
46 وأقل من 51	18
51 وأقل من 56	25
56 وأقل من 61	30
61 وأقل من 66	24
66 وأقل من 71	14
71 وأقل من 76	6
76 وأقل من 81	3

(م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٨٠)



شكل ٧-٣

٧-٣ الطرق الأخرى للتمثيل البيانى

منحنيات لورنز : منحنى لورنز هو وسيلة لاظهار التشابه (أو الاختلاف) فى توزيع احدى الخواص فى عينتين مختلفتين . وسنوضح طريقة انشاء واستخدام هذا المنحنى بواسطة المثال التالى :

مثال ٧-٣-١ تدهورت العلاقات الصناعية بمصنع شركة جى - كى - ليمتد الموجود بمقاطعة ويسكس . وقد أثبتت ادارة شئون الأفراد أن أحد العوامل المؤدية الى ذلك هو عدم المساواة فى أجور العاملين التى تدفع طبقا لنظام الحوافز .

وكان العاملون يعملون لمدة ثمانى ساعات يوميا ، وكان حافز متدرج يدفع لهم اذا زاد الانتاج القياسى المقابل لـ 360 دقيقة عمل .

ويبين الجدول A أدناه موقف انتاج العاملين فى شهر يونيو ١٩٧٥

وقد تم تحسين ظروف العمل فى المواقع التى لوحظ فيها انخفاض الأداء ، ثم أعيد قياس موقف الأنتاج فى أكتوبر ١٩٧٥ فحصلنا على النتائج الموضحة بجدول B .

(أ) مثل النتائج الواردة بالجدولين A و B على شكل منحنى لورنز .

(ب) علق على النتائج

جدول B ـ اكتوبر ١٩٧٥ عدد العاملين	جدول A ـ يوليو ١٩٧٥ عدد العاملين	انتاج العامل مقاسا بالدقائق القياسية فى اليوم
4	10	300
11	32	320
11	20	340
9	18	360
10	2	380
12	5	400
12	5	420
11	5	440
10	3	460
5		480
5		500

(م م ت أ ـ الجزء ١ ـ نوفمبر ١٩٧٥)

الاجابة

(أ) الخطوة الأولى لانشاء منحنى لورنز هى اعداد جدول للتكرار المتجمع للعينيتن وللمثال المعطى يكون لدينا .

أكتوبر ١٩٧٥ عدد العاملين	يونيو ١٩٧٥ عدد العاملين	دقائق قياسية
4	10	300 أو أقل
15	42	320 أو أقل
26	62	340 أو أقل
35	80	360 أو أقل
45	82	380 أو أقل
57	87	400 أو أقل
69	92	420 أو أقل
80	97	440 أو أقل
90	100	460 أو أقل
95	100	480 أو أقل
100	100	500 أو أقل

والخطوة التالية التحويل إلى جدولين للنسب المئوية المتجمعة للتكرار . ولكن فى الحالة المذكورة هنا لا نحتاج لذلك حيث أن مجموع التكرارات فى العينتين هو 100 من البداية .

وبعد الحصول على جداول للنسب المئوية المتجمعة للتكرار نقوم بانشاء منحنى لورنز بتوقيع النسب المئوية المتجمعة للتكرار للحالتين الواحدة مقابل الأخرى ثم توصيلها بمنحنى أملس . ويبين الشكل (٧ ـ ٤) منحنى لورنز للمثال المذكور .

(ب) لو كانت الانتاجية فى الحالتين واحدة لكان منحنى لورنز منطبقا على الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (0,0) و (100 , 100) . ولهذا فإن هذا المستقيم يسمى **خط التوزيع المتساوى** .

ويدل الفرق بين منحنى لورنز المرسوم فعلا وبين خط التوزيع المتساوى على مدى الاختلاف بين التوزيعين . وبالتالى فان المساحة بين المنحنى وبين هذا المستقيم تسمى **« بمساحة عدم التساوى »** .

وفى المثال المذكور تعكس مساحة عدم التساوى التحسن الذى حدث فى الانتاجية فى الفترة من يونيو الى أكتوبر .

ونلاحظ أن منحنى لورنز ليس إلا وسيلة للتوضيح البصرى ، ولا يمكن الحصول على نتائج عددية ذات دلالة من اتساع مساحة عدم التساوى .

تمرين ٧ ـ ٣ ـ ١: يبين الجدول التالى الضرائب التى تحصل من المواطنون من مختلف شرائح الدخل فى عينة من 2000 مواطن . أنشىء منحنى لورنز للبيانات المعطاه بالجدول وعلق عليه .

اجمالى الدخل السنوى (£)	عدد الأفراد	اجمالى الضريبة التى تدفعها المجموعة (£)
أقل من 3 000	140	30 000
3 000 وأقل من 4 000	520	100 000
4 000 وأقل من 5 000	620	330 000
5 000 وأقل من 7 000	440	350 000
7 000 وأقل من 10 000	240	370 000
10 000 وأقل من 16 000	40	340 000

الرسومات البيانية للسلاسل الزمنية والرسومات نصف اللوغاريتمية: سنتناول السلاسل الزمنية بالتفصيل فى الفصل العاشر ، ولكننا سنوضح الآن ما هية السلاسل الزمنية ، وسندرس بعض الرسومات البيانية البسيطة المستخدمة لتمثيل هذا النوع من البيانات .

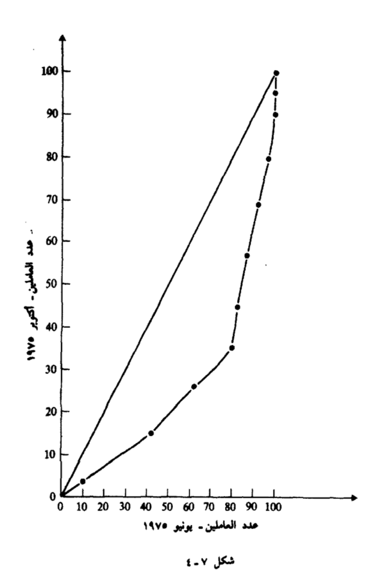
السلاسل الزمنية عبارة عن مجموعة من البيانات المتعلقة بفترات زمنية ما . وفى معظم الأحوال ، تكون الفترات الزمنية متساوية ، وعلى سبيل المثال كل شهر ، أو كل ثلاثة أشهر ، أو كل سنة لمدة معينة . وتظهر معظم الاحصائيات المنشورة على شكل سلاسل زمنية . وعلى سبيل المثال ، فإن الرقم القياسى لأسعار التجزئة ينشر كل شهر .

وتمثل السلاسل الزمنية برسم بيانى يوقع الزمن على المحور الأفقى وقيم المتغير على المحور الرأسى .

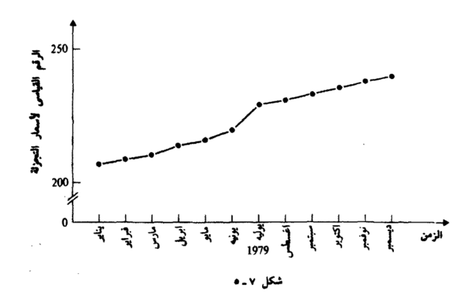
وبالشكل ٧ ـ ٥ مثال بسيط لرسم بيانى لسلسلة زمنية . وهذا الرسم منشأ على أساس قيم الرقم القياسى لأسعار التجزئة لشهور عام ١٩٧٩ .

أما الرسم البيانى نصف اللوغاريتمى ، فهو نوع آخر من هذه الرسومات توقع فيه على المحور الرأسى قيم لوغاريتمات المتغير بدلا من المتغير ذاته . ويوقع الزمن على المحور الأفقى كما سبق .

وأكثر استخدامات الرسومات البيانية نصف اللوغاريتمية شيوعا هو لاجراء المقارنات بين السلاسل الزمنية . وسندرس كمثال أحد هذه الرسومات البيانية ، ثم نناقش الفكرة وراءه .


عدد العاملين - اكتوبر ١٩٧٥
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
عدد العاملين - يونيو ١٩٧٥

شكل ٧ - ٤


الرقم القياسي لأسعار التجزئة
250
200
0
يناير
فبراير
مارس
ابريل
مايو
يونيه
يوليه
اغسطس
سبتمبر
اكتوبر
نوفمبر
ديسمبر
1979
الزمن

شكل ٧ - ٥

وهناك طريقتان لتوقيع القيم : الأولى هى إيجاد قيم لوغاريتمات المتغير ، ثم توقيعها على ورق رسم بيانى عادى . والثانية هى باستخدام ورق رسم بيانى نصف لوغاريتمى . وهو ورق معد بحيث تكون المسافات على أحد المحورين مساوية لقيم لوغاريتمات الأعداد المكتوبة . وفيما يلى سنبين استخدام الطريقتين للبيانات التالية .

باعتبارك محاسبا بادارة شركة Z ليمتد أعطيت الاحصائيات التالية عن انتاج أحد منتجاتها الكهربائية النمطية التى تعد للسوق المحلية .

السنة	الانتاج القابل للبيع بالآلاف	متوسط عدد عمال التجميع	متوسط الانتاج اليومى للعامل	أجر العامل فى الساعة بالبنس
1971	362	62	26	55
1972	358	60	26	58
1973	366	60	27	62
1974	365	56	28	67
1975	370	55	29	74
1976	367	52	31	90

(البيانات مأخوذة من م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٨)

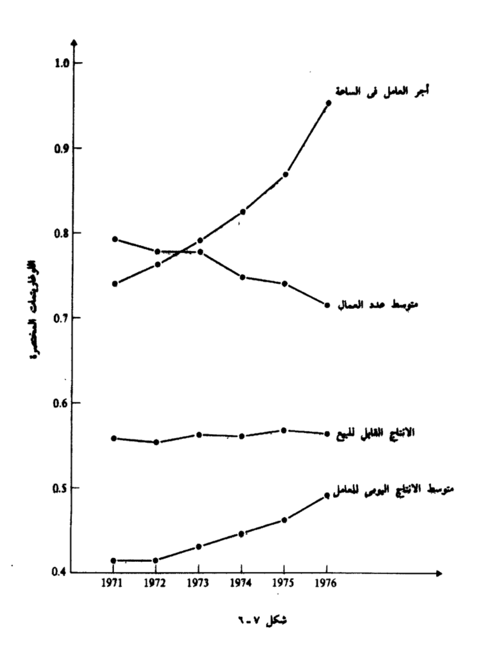
والآن سنقارن بين التغيرات التى حدثت فى كل من المتغيرات الأربعة على مدى فترة السنوات الست بتوقيعها جميعا على ورق رسم بيانى نصف لوغاريتمى . ثم سنعتبر مزايا وعيوب هذا النوع من الرسم البيانى بالمقارنة بالرسم البيانى العادى لسلسلة زمنية . ولتوقيع الرسم البيانى النصف لوغاريتمى على ورق رسم بيانى عادى يجب أولا ايجاد لوغاريتمات الأعداد كلها :

السنة	لوغاريتم الانتاج القابل للبيع بالآلاف	لوغاريتم متوسط عدد عمال التجميع	لوغاريتم متوسط الانتاج اليومى للعامل	لوغاريتم أجر العامل فى الساعة بالبنس
1971	2.5587	1.7924	1.4150	1.7404
1972	2.5539	1.7782	1.4150	1.7634
1973	2.5635	1.7782	1.4314	1.7924
1974	2.5623	1.7482	1.4472	1.8261
1975	2.5682	1.7404	1.4624	1.8692
1976	2.5647	1.7160	1.4914	1.9542

وعند مقارنة الرسومات البيانية للنصف لوغاريتمى الأربع فإننا نهتم بالميل من القيم المختلفة أكثر اهتمامنا بالقيم ذاتها . ولذلك فقبل توقيع القيم من المفيد أن نختصر الجزء من اللوغاريتمات الموجود قبل العلامة العشرية وذلك بطرح أصغر الأجزاء فى كل مجموعة من اللوغاريتمات من الباقية . ونتيجة ذلك هى تحريك الرسومات البيانية إلى أسفل على الورقة مما يقربها من بعضها ويسهل مقارنتها . ويبين شكل (٧ ـ ٦) الرسم البيانى نصف اللوغاريتمى بعد اختصار اللوغاريتمات بهذه الطريقة .

أما إذا كنا نستخدم ورق رسم بيانى نصف لوغاريتمى ، فإننا نقرب الرسومات من بعضها لسهولة المقارنة بواسطة إيجاد أكثر من مقياس للقيم على المحور الرأسى . بالنسبة للمثال المذكور يمكن توقيع بيانات الانتاج على جزء من الورقة بترقيم هذا الجزء من 100 الى 1000 فى حين توقع البيانات الخاصة بالمتغيرات الثلاثة الباقية على جزء ثان يُرقم من 10 الى 100 . ويوضح الشكل (٧ ـ ٧) هذا الرسم البيانى .

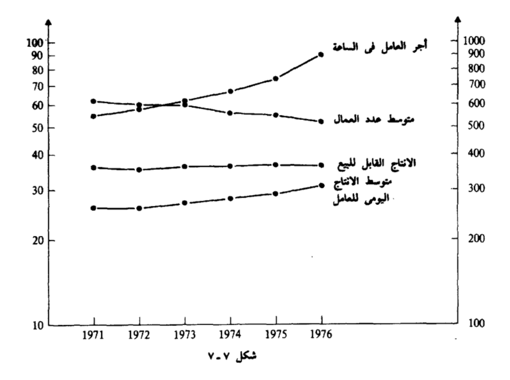
وتمثل المسافات الرأسية المتساوية على الرسم البيانى نصف اللوغاريتمى تغيرات نسبية متساوية . وهكذا فإن أجزاء الرسم البيانى ذات الميل المتساوى تمثل تغيرات نسبية متساوية فى قيم المتغيرات المعنية .



شكل ٧ - ٦

ونلاحظ فى المثال أن الجزء من الرسم البيانى الخاص بأجر العامل في الساعة عن الفترة من ١٩٧٢ - ١٩٧٣ (ويمثل ارتفاعا من 58 الى 62) له نفس الميل مثل الجزء من الرسم البيانى الخاص بانتاج العامل عن الفترة من ١٩٧٥ - ١٩٧٦ (ويمثل ارتفاعا من 29 الى 31) .

ولما كانت التغيرات النسبية هى التى تهمنا ، فإن السلاسل الزمنية المقاسة بوحدات مختلفة يمكن أن تقارن ببعضها على نفس الرسم البياني نصف اللوغاريتمي . وقد استخدمنا ذلك في المثال المعطى حيث كان الانتاج مقاسا بآلاف الوحدات فى حين كانت الأجور مقاسة بالبنسات فى الساعة .



شكل ٧ ـ ٧

والرسومات البيانية نصف اللوغاريتمية مفيدة بصفة خاصة عندما يغطى أحد المتغيرات مدى واسعا للتغير . وفى مثل هذه الحالة ، فإن استخدام رسم بيانى عادى يتطلب استخدام مقياس رسم مصغر على المحور الرأسى بدرجة لا تظهر معها الاختلافات النسبية المحسوسة فى المتغيرات الأخرى . ومن جهة أخرى ، فإن هناك عيبا فى الرسومات البيانية نصف اللوغاريتمية ، وهو استحالة تمثيل القيم السالبة ، أو الصفرية للمتغيرات عليها .

والنتائج التى يمكن التوصل إليها من الشكلين (٧ ـ ٦) و (٧ ـ ٦) بشأن المثال المذكور هى أن الانتاج ظل ثابتا نسبيا فى حين زادت الأجور فى الساعة بمعدل كبير . أما انتاج العامل ، وعدد العمال فقد زاد أولها ونقص الثانى بمعدلات متقاربة الى حد كبير . وهذه الحقيقة الأخيرة لم تكن لتظهر بوضوح على رسم بيانى عادى لأن أعداد العمال نحو ضعف الأعداد الدالة على انتاج العمال .

تمرين ٧ ـ ٣ ـ ٢ وقع البيانات التالية على رسم بيانى ـ
(أ) عادى
(ب) نصف لوغاريتمى

الفترة	1	2	3	4	5	6	7	8
الرقم	200	320	640	1 180	2 080	4 050	6 480	9 030

اذكر مزايا وعيوب استخدام الرسم البيانى نصف اللوغاريتمى فى هذه الحالة .
(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٤)

خرائط المستطيلات يندرج تحت هذا العنوان العام عدد من الرسومات البيانية المختلفة والصفة المشتركة بينها هى أن بها خطوط أو « مستطيلات » يمثل طولها التكرار ، أو أية « قيمة » أخرى لإحدى الخواص ، وتستخدم الأعمدة البيانية عادة

عندما تكون الصفات المعتبرة ذات طابع كيفى . أما بالنسبة للبيانات المقسمة إلى مراحل كمية ، فإن المدرج التكرارى يكون أنسب .

وسندرس كمثال لأبسط أنواع خرائط المستطيلات البيانات التالية بشأن استخدام احدى الشركات للقيمة المضافة فى أحد الأعوام . والأعداد المعطاه بملايين الجنيهات .

اجمالى القيمة المضافة	175.2
استخدامات القيمة المضافة	
ما يدفع للمستثمرين	26.9
ما يدفع كضرائب على الارباح	13.1
ما يدفع للعاملين بالشركة	97.8
ما يخصص كاستثمارات للنمو	37.4
الجملة	175.2

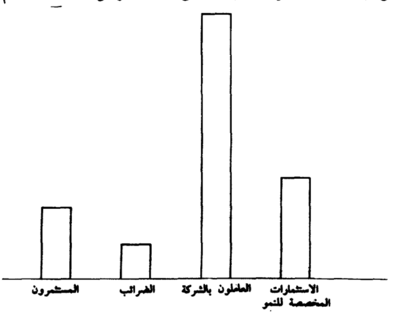
(البيانات مأخوذة من م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٧٩)

ويوضح الشكل (٧ ـ ٨) خريطة مستطيلات بسيطة تمثل هذه البيانات . ويمكن كذلك رسم الأعمدة أفقية كما فى شكل (٧ ـ ٩)

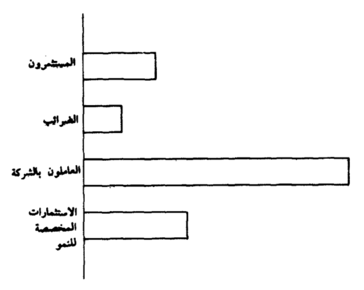
ويعطى كل من هذين الشكلين انطباعا بصريا جيدا عن الأهمية النسبية لكل من الاستخدامات المختلفة للقيمة المضاعفة .

وهناك طريقة أخرى وهى استخدام مستطيل واحد رأسى ، أو أفقى مقسم الى أقسام يمثل طول كل منها قيمة الصفات المعتبرة . ويبين شكل (٧ ـ ١٠) النوع الأفقى من هذه الأعمدة . ويسمى هذا النوع من الأعمدة البيانية خريطة مستطيلات مفردة .

وعموما فإن هذا النوع لا يمثل جيدا المجموعة الواحدة من البيانات كما تمثلها الأعمدة البيانية المنفصلة . ولكنه يكون مفيدا عند مقارنة مجموعات مختلفة من البيانات ، كما سنرى فيما بعد . ومن المفيد لأغراض المقارنة استخدام



شكل ٧ ـ ٨



شكل ٧ـ٩

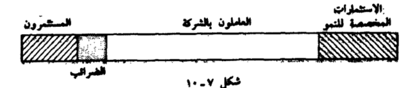
النسب المئوية للتكرار ، أو النسب المئوية للقيم المعطاه بدلا من القيم ذاتها . ويكون هذا أفضل بصفة خاصة عندما يكون التكرار الكلى ، أو مجموع القيم مختلفا فى المجموعات المختلفة . أما بالنسبة لمجموعة واحدة من البيانات ، فإن استخدام النسب المئوية لا يغير شيئا فى الأعمدة البيانية لأن ، التكرارات أو القيم تظل بنفس نسبتها الى بعضها .

ولكى نرى كيفية استخدام خرائط المستطيلات لمقارنة مجموعات من البيانات لنفرض أنه كان لدينا بالاضافة الى البيانات المعطاه فى المثال أعلاه مجموعة أخرى من البيانات خاصة بالعام السابق . وعندئذ ستكون المجموعة الكاملة من البيانات كما يلى :

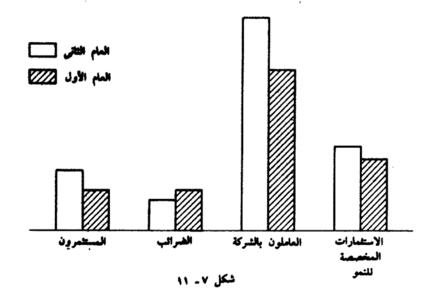
العام الأول	العام الثانى	
139.9	175.2	اجمالى القيمة المضافة
		استخدامات القيمة المضافة :
17.5	26.9	ما يدفع للمستثمرين
16.9	13.1	ما يدفع كضرائب على الأرباح
73.6	97.8	ما يدفع للعاملين بالشركة
31.9	37.4	ما يخصص كاستثمارات للنمو
139.9	175.2	

(البيانات مأخوذة من م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٧٩)

فإذا كنا نستخدم خرائط المستطيلات المنفصلة ، فانه يمكن عمل رسمين بيانيين منفصلين . ولكن مثل هذه الرسومات البيانية لا تسهل مقارنتها . لذلك يفضل عمل رسم بيانى موحد تكون قيمة الأعمدة الرأسية ، أو الأفقية مرسومة أزواجا متجاورة بحيث يمثل كل زوج نفس الخاصية فى مجموعتى البيانات .



شكل ٧ـ١٠



شكل ٧ - ١١

ويبين شكل (٧ - ١١) النوع الرأسى من هذه الأعمدة ، وقد استخدمنا فيه القيم الخام الواردة بالمثال . ويسمى هذا الرسم البيانى « خريطة مستطيلات مركبة »

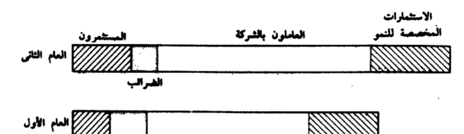
ويمكن كذلك أن نرسم عمودين ذوى مركبات لكل من السنتين جنبا الى جنب . ويبين الشكل (٧ - ١٢) الحالة الأفقية لهذين العمودين .

وفى الحالتين المذكورتين فإن الاختلاف فى اجمالى القيم يعوق المقارنة . وفى الحالة الثانية ، فان اختلاف الأطوال الكلية للمستطيلين يجعل من الصعوبة بمكان مقارنة أطوال الأجزاء ، أو « المركبات » . ولذلك فمن المفيد لتسهيل المقارنة استخدام النسب المئوية .

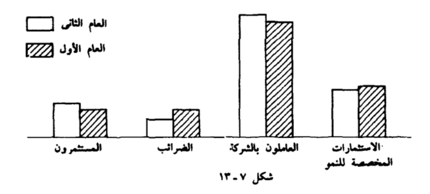
وبتحويل القيم الواردة بالمثال إلى نسب مئوية نحصل على :

	العام الثانى	العام الأول
اجمالى القيمة المضافة	100%	100%
استخدامات القيمة المضافة		
ما يدفع للمستثمرين	15.4	12.5
ما يدفع كضرائب على الأرباح	7.5	12.1
ما يدفع للعاملين بالشركة	55.8	52.6
ما يخصص كاستثمارات للنمو	21.3	22.8
	100	100

ويبين شكل (٧ - ١٣) رسما بيانيا يستخدم أزواجا منفصلة من الأعمدة الرأسية .



شكل ٧ - ١٢



شكل ٧ - ١٣

ونلاحظ أن الجزء الممثل للاستثمارات المخصصة للنمو فى العام الأول أصبح الآن أطول فى حين أنه عند استخدام القيم الخام كان هذا الجزء أطول فى العام الثانى .

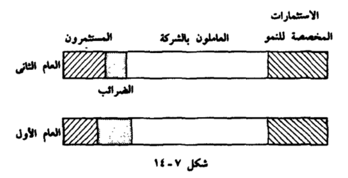
ويبين شكل (٧ - ١٤) مستطيلات بيانية ذات مركبات تمثل النسب المئوية للعامين . وهذا النوع من المستطيلات البيانية المنفردة من خرائط المستطيلات هو أفضلها . فكون المستطيلات لها نفس الطول الكلى يجعل مقارنة الأجزاء المتناظرة أسهل .

تمرين ٧ - ٣ - ٣ تبين الأرقام التالية الواردات فى بريطانيا بملايين الجنيهات ومصادرها فى عامى 1964 و 1968 .

المصدر	امريكا الشمالية	منطقة الأسترليني	أوروبا الغربية	بقية العالم
1964	1 109	1 874	1 813	899
1968	1 576	2 244	2 899	1 181

ارسم خرائط أعمدة مناسبة لمقارنة أرقام الواردات فى هذين العامين .

الرسوم البيانية الدائرية فى الرسوم البيانية الدائرية ترسم دائره ، وتقسم إلى قطاعات بحيث تمثل مساحة كل قطاع التكرار ، أو أية قيمة أخرى تهمنا . وعمليا فإن الرسومات البيانية الدائرية تكون منشأة دائما على أساس التكرارات النسبية وطريقة انشاء هذه الرسومات هى أولا بحساب النسب المئوية للتكرار ثم بتقسيم الزاوية 360° الواقعة عند مركز الدائرة إلى هذه الأجزاء النسبية باستخدام منقلة . وفى النهاية تقسم الدائرة إلى قطاعات برسم مستقيمات تخرج من المركز كآشعة عند الزوايا المطلوبة . وعندئذ ستكون مساحات القطاعات الناتجة ممثلة للتكرارات أو القيم الأخرى المعنية .



شكل ٧ - ١٤

يتضمن التقرير السنوى لاحدى الشركات عن عام معين البيانات التالية :

النشاط	%
تكرير السكر	26
تداول السلع والتجارة والتخزين والتوزيع	37
انتاج السكر الخام	4
النشا	8
مواد البناء والادارات الهندسية والأنشطة المتنوعة	16
النقل	9

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٧٩)

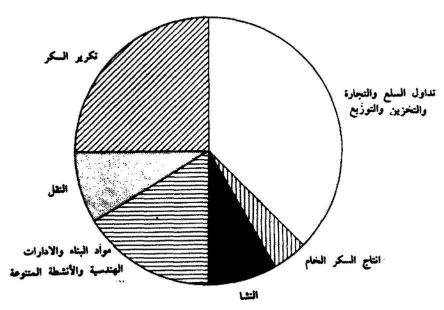
وسنوضح هذه البيانات برسم بيانى دائرى .

والخطوة الأولى هى تقسيم 360 إلى النسب المئوية المطلوبة . وسنجد أن 26% من 360° يساوى 93.6° ، وأن 37% من 360° يساوى 133.2° وهكذا . وفيما يلى المجموعة الكاملة من البيانات :

النسبة المئوية	26	37	4	8	16	9
الزاوية بالدرجات	93.6	133.2	14.4	28.8	57.6	32.4

وبالتالى يكون الرسم البيانى الدائرى كما هو موضح بشكل (٧ ـ ١٥) .

والرسومات البيانية الدائرية شائعة الاستخدام ، وهى تعطى صورة مفيدة عن قيم النسب المئوية ، وخاصة عند مقارنة مجموعات مختلفة من البيانات . ولكن رسمها أصعب قليلا من رسم الأعمدة البيانية حيث أنها تحتاج الى برجل ومنقلة .



شكل ٧ ـ ١٥

تمرين ٧ـ٣ـ٤ تبين الأرقام التالية توزيع صادرات بريطانيا بملايين الجنيهات فى عامى 1964 و 1968 .

الصادرات	امريكا الشمالية	منطقة الاسترلينى	أوروبا الغربية	بقية العالم
1964	594	1 529	1 655	622
1968	1 139	1 756	2 264	1 018

ارسم رسماً بيانيا دائريا لمقارنة توزيع الصادرات على الجهات الأربع فى العامين .

الرسومات المصورة هذه الرسومات نوع من التمثيل البيانى تستخدم فيه صور مكررة لتمثيل التكرار ، أو أية قيمة أخرى للخاصية المبحوثة . وعلى سبيل المثال سنأخذ البيانات التالية عن عدد العاطلين (بالالاف) فى منطقة أنجليا الشرقية كمتوسط شهرى للأعوام 1972 و 1974 و 1975 .

السنة	1972	1973	1974	1975
عدد العاملين (بالآلاف)	18.5	12.4	12.9	23.8

ويمكن تمثيل هذه المجموعة من البيانات برسم مصور كالرسم الموضح بشكل (٧ ـ ١٦)
وهذه الطريقة شائعة الاستخدام ، وتعطى انطباعا بصريا جيدا عن مجموعة البيانات المبحوثة ، ولكنها ليست دقيقة ويفضل عدم استخدامها الا كطريقة تقريبية لعرض البيانات بصفة عامة .

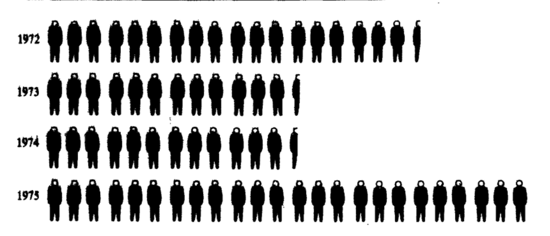
تمرين ٧ـ٣ـ٥ الجدول التالى مأخوذ من بيانات الملخص السنوى للاحصائيات .

السنة	توريدات الدراجات (بالآلاف)
1951	4 033
1952	3 624
1953	2 994
1954	3 297
1955	3 562
1956	2 873
1957	2 548
1958	2 156
1959	2 213
1960	2 278

المصدر : الغرفة التجارية .

مثل الخواص البارزة لهذا الجدول بواسطة رسم مصور . ما هى مزايا وعيوب هذا النوع من التمثيل ؟

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ يونيو ١٩٦٤)



شكل ٧ - ١٦

تمارين

٧ - ١ (أ) ارسم البيانات التالية مضلعا للتكرار المتجمع (أوجيف)، ومدرجا تكراريا ومضلعا تكراريا.

الموظفون بأجور اسبوعية	
مجموعة الأجور	**عدد الموظفين**
£ £	
18 وأقل من 22	30
22 وأقل من 26	45
26 وأقل من 30	150
30 وأقل من 34	160
34 وأقل من 38	170
38 وأقل من 42	120
42 وأقل من 46	50
46 وأقل من 50	20

(ب) ما هو الغرض من الأوجيف

(م م ت أ - اتساس ب - مايو ١٩٧٥)

٧ - ٢ أنشىء رسما بيانيا نصف لوغاريتمي للبيانات التالية

العام	مجموع الأنفاق على الطرق (مليون £)	مجموع عدد السيارات المرخصة (بالآلاف)	مجموع سيارات النقل المرخصة (بالآلاف)	مجموع حوادث الطرق (بالآلاف)
	في بريطانيا العظمى			
1959	228.0	4 972	1 378	333
1960	238.0	5 532	1 448	348
1961	270.7	5 983	1 503	350
1962	301.2	6 560	1 522	342
1963	342.4	7 380	1 582	356
1964	405.8	8 252	1 633	385
1965	421.2	8 922	1 661	397
1966	457.4	9 522	1 639	392
1967	528.2	10 312	1 692	370
1968	580.9	10 825	1 640	349

(المصدر : الملخص السنوى للاحصاء)

فسر الرسومات البيانية التى رسمتها وأذكر مزايا هذا النوع من التمثيل البيانى إن وجدت .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٧)

٧ ـ ٣ الأرقام التالية مأخوذة من الملخص السنوى للاحصاء لعام ١٩٧٦ (جدول ٣٦٦) وهى متعلقة بتوزيع ثروة الأفراد المعروفة فى بريطانيا العظمى

مدى الثروة		1967		1974	
أكبر من (£)	لا يزيد عن (£)	عدد الحالات (بالالاف)	الف مليون (£)	عدد الحالات (بالالاف)	الف مليون (£)
–	1 000	5 398	2.8	3 410	2.0
1 000	3 000	5 273	9.8	4 775	8.6
3 000	5 000	2 966	11.6	2 223	8.7
5 000	10 000	2 177	15.3	4 131	30.3
10 000	15 000	620	7.6	2 166	26.5
15 000	20 000	270	4.8	757	13.3
20 000	25 000	157	3.4	415	9.6
25 000	50 000	279	9.9	640	21.7
50 000	100 000	109	7.5	229	15.4
100 000	200 000	37	5.1	65	9.2
200 000		14	5.8	26	11.8
	Total	17 300	83.6	18 837	157.1

مثل هذه البيانات على شكل منحنى لورنز وعلق على النتيجة .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٩)

٧ ـ ٤ أظهرت حسابات بنك لثلاثة أعوام توزيع الأرباح كما يلى :

	1978 £m	1977 £m	1976 £m
الربح مثل الضرائب	373	295	198
الضرائب	135	140	82
فواتير الأقلية	12	12	11
أرباح الأسهم	30	23	20
الربح المتبقى	196	120	85

والمطلوب تمثيل البيانات المعطاة باحدى طرق التمثيل البيانى .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٨٠)

الفصل الثامن

ملخص احصائى

٨ ـ ١ تمهيد

فى محاولة تمثيل مجموعة البيانات بطريقة مناسبة وسهلة وجد أن من أحسن الوسائل تبويب البيانات وتمثيلها فى جداول تكرارية ، أو عن طرق التمثيل البيانى .

نوجه أهتمامنا الآن نحو استخراج رقم ، أو اثنين من مجموعة البيانات للاستدلال على ملخص لحقائق الظاهرة التى تمثلها مجموعة البيانات ككل .

أولا : سوف نبحث عن عدد وحيد يمثل مركز هذه البيانات ، وسوف نشير لهذا العدد بأنه مقياس النزعة المركزية ، أو بصورة أعم بأنه « المتوسط » (يفضل عدم استخدام هذا اللفظ فى المجال الاحصائى) .

ثانيا : سوف نجد عدداً يدل على مدى التشتت بين مفردات القيم . مثل هذا العدد يعرف بمقياس التشتت . والانحراف المعيارى هو الأكثر استعمالا بين هذه المقاييس .

ثالثا : سوف نبحث عن عدد يدل على شكل التوزيع ، أى بمعنى أدق هل مفردات البيانات متماثلة فى توزيعها ، أو معظم البيانات قيم صغيرة نسبيا (التوزيع مفرطح يمينا) أو معظم البيانات قيم كبيرة نسبيا (التوزيع مفرطح يسارا) . ويعرف هذا العدد بمقياس الألتواء .

ويوجد ثلاثة مقاييس أساسية للنزعة المركزية تعرف بالوسط الحسابى ، الوسيط والمنوال . وسوف ندرس كلا من هذه المصطلحات : أولا بالنسبة لمجموعة الأعداد بيانات غير مبوبة ، ثم بالنسبة للبيانات فى الجدول التكرارى (بيانات مبوبة) .

٨ ـ ٢ الوسط الحسابى

وأشهر مقاييس النزعة المركزية هو « الوسط الحسابى » . والوسط الحسابى يختلف عن ما يسمى بالوسط الهندسى ، أو ما يسمى بالوسط التوافقى .

(أ) بيانات غير مبوبة

لا يجاد الوسط الحسابى لمجموعة من الأعداد نجمع تلك الأعداد ونقسم الناتج على عددها وعلى سبيل المثال : الوسط

الحسابى للأرقام 4,7,8,2,4 و 5 هو

$$\frac{4+2+8+7+4+5}{6}=\frac{30}{6}=5$$

اعتبر أن الأرقام هى 60,50,40,80,50, . إذن وسطهما الحسابى هو 56 .

$$\frac{50+80+40+50+60}{5}=\frac{280}{5}=56$$

ولكى تحصل على أساس للمعنى السابق ، فسوف يفسر على النحو التالى :

أى مثلا : ألن يمتلك 50p بريان يمتلك 80p كولين يمتلك 40p دافيد يمتلك 50p أدى يمتلك 60p . فكم يحصل كل منهم إذا وضعوا كلهم نقودهم فى صندوق واحد ووزعت بينهم بالتساوى ؟

الكمية التى فى الصندوق تساوى 50p + 80p + 40p + 50p + 60p = 280p ويوجد 5 من الأشخاص يشتركون فى هذه النقود . فنصيب كل منهم يساوى 56p= 5 / 280

وإذا تعرضت من حين لآخر لكلمة « متوسط » فى أى تطبيق ، أو من الأنباء المذاعة فإنها غالبا تعنى بها الوسط .

وقبل أن نترك الوسط الحسابى للبيانات ، فمن الضرورى أن نعرف الملخص للطريقة الرياضية لحسابه . وتعطى بما يلى :

١ - أجمع كل قيم المفردات معا .
٢ - اقسم على عدد المفردات .

وفى المثال السابق عندنا 5 أرقام 60,50,40,80,50. بصورة عامة نفرض لدينا n من الأرقام $x_n,\dots,x_3,x_2,x_1$ والرمز الرياضى المختصر لمجموع قيم x معا هو Σx (تقراء سيجما x) . وعلى سبيل المثال :

$$y_1=1, y_2=3, y_3=7, y_4=4, y_5=1, y_6=8$$
$$\Sigma y=1+3+7+4+1+8=24$$

وبعد جمع قيم x كلها معا لا بد أن نقسم المجموع على عدد المفردات لكى نحصل على الوسط الحسابى لقيم x.

الرمز $\bar{x}$ (يقرأ x بار) يستعمل للصورة العامة لتمثيل الوسط الحسابى . فالطريقة الرياضية المختصرة لتعريف الوسط الحسابى للبيانات غير المبوبة هى :

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x}{n}$$

(ب) بيانات مبوبة

ولايجاد الوسط الحسابى لمجموعة من البيانات المبوبة فى جدول تكرارى ، نجد تقريبا لجميع المفرادت فى المجموعة ويعرف بمركز الفئة ، ثم نجد الوسط الحسابى لهذه المراكز كبيانات غير مبوبة .

ونفرض الجدول التكرارى التالى لتوزيع أوزان 150 مسمار قلاووظ .

	الوزن (بالأوقية)		
4	5.00	وأقل من	5.01
18	5.01	وأقل من	5.02
25	5.02	وأقل من	5.03
36	5.03	وأقل من	5.04
30	5.04	وأقل من	5.05
22	5.05	وأقل من	5.06
11	5.06	وأقل من	5.07
3	5.07	وأقل من	5.08
1	5.08	وأقل من	5.09

(المعلومات من ج م م ـ أساس ب ـ يونيو ١٩٧٨)

ولايجاد الوسط الحسابى لكل مفردات الفئة الأولى ، فهو يُقرب الى 5.005 ولتلك التى فى الفئة الثانية فيقرب الى 5.015 وهكذا .

إذن الوسط الحسابى يوجد عن طريق جمع 5.005 أربع مرات و 5.015 ثمانى عشرة مرة و 5.025 خمسة وعشرين مرة وهكذا ، ثم نقسم المجموع على العدد الكلى للمفرادت المعطى ، والذى هو :
150 = 4+18+25+36+30+22+11+3+1 أى أن الوسط يساوى

$$\frac{4 \times 5.005 + 18 \times 5.015 + 25 \times 5.025 + 36 \times 5.035 + 30 \times 5.045 + 22 \times 5.055 + 11 \times 5.065 + 3 \times 5.075 + 1 \times 5.085}{4 + 18 + 25 + 36 + 30 + 22 + 11 + 3 + 1}$$

= 5.038 أوقية

وبصورة أعم ، فإذا رمزنا لمراكز الفئات فى جدول تكرارى بالرمز x وتكراراتها بالرمز f بهذا يمكن حساب الوسط الحسابى بالمعادلة التالية

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

عمليا فليس من المعتاد استخدام هذه المعادلة بهذا الشكل بالضبط فى حساب الوسط الحسابى لبيانات مبوبة . بل تجرى بعض المعالجات الأولية لهذه البيانات تعرف باسم التعديل لتبسيط الحسابات . (هذه الفكرة للتعديل فى النظام تصبح أكثر أهمية من الحالة الأخيرة وذلك عندما ندرس الأنحراف المتوسط ، والانحراف المعيارى) ،
صورة التعديل الأكثر شيوعا تتم على مرحلتين :

١ ـ يطرح من كل مركز فئة قيمة مناسبة ، ولتكن a مثلا . هذه القيمة تعرف فى بعض الأحيان بالوسط الافتراضى . وإذا كانت a مختارة بدقة ، فالوسط الحسابى الحقيقى سوف لا يختلف عنها كثيراً .

٢ ـ وبعد الحصول على القيم $x - a$ نقسم هذه القيم على الطول العام c للفئة والناتج يعطى مركز الفئة المعدل :

$$d = \frac{x - a}{c}$$

وبعد تعديل البيانات نحسب الوسط الحسابى للقيم المعدلة d على النحو التالى

$$\bar{d} = \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$$

وهذه أسهل من حسابها عن حساب x مباشرة ، وأخيرا نستخدم العلاقة التالية

$$\bar{x} = c \cdot \bar{d} + a$$

لتوضيح هذه الطريقة نرجع للمثال السابق للبيانات المبوبة عن 150 مسمار قلاووظ . المأخوذة من حـ م م الأساس ب : يونيو ١٩٧٨ .

الوزن (بالأوقية)	التكرار f	مركز الفئة x	$x - 5.045$	$d = \frac{x - 5.045}{0.01}$	fd
5.00 وأقل من 5.01	4	5.005	−0.04	−4	−16
5.01 وأقل من 5.02	18	5.015	−0.03	−3	−54
5.02 وأقل من 5.03	25	5.025	−0.02	−2	−50
5.03 وأقل من 5.04	36	5.035	−0.01	−1	−36
5.04 وأقل من 5.05	30	5.045	0.00	0	0
5.05 وأقل من 5.06	22	5.055	0.01	1	22
5.06 وأقل من 5.07	11	5.065	0.02	2	22
5.07 وأقل من 5.08	3	5.075	0.03	3	9
5.08 وأقل من 5.09	1	5.085	0.04	4	4
	$\Sigma f = 150$				$\Sigma fd = -99$

$$\bar{d} = \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} = \frac{-99}{150} = -0.66$$

ونجد أن

$$\bar{x} = 0.01 \times (-0.66) + 5.045 = -0.0066 + 5.045 = 5.0384$$

أى أن متوسط وزن المسمار الواحد يساوى 5.038 من الأوقيات . وهذه هى نفس النتيجة السابقة .

وفى هذه المثال قد أخترنا الوسط الافتراضى a يساوى 5.045 من الأوقيات . بطرح هذا من مراكز الفئات نحصل على أعداد فى المدى من 0.04− الى 0.04+ بدلا من المدى 5.005 الى 5.085

ثم بعد هذا نقسم على طول الفئة 0.01 لكى نحصل على فئة قيم d المتراوحة من 4 الى 4+ .

وحساب d كان سهلا جدا ، ثم فى النهاية نستطيع أن نحصل على x .

تمرين ٨ ـ ٢ ـ ١ فرن يسع حجمه بالتقريب 200 طن ، يستخدم لصب سبائك من الصلب تزن كل سبيكة 10 من الأطنان . كمية الصلب فى الفرن لا يمكن حصرها بدقة ، ولذلك فان سبيكة غير كاملة تنتج عند صب السبائك . وعلى

سبيل المثال : إذا كان وزن الصلب المنصهر فى الفرن 198 طنا ، فسوف تنتج 19 سبيكة كاملة وواحدة غير كاملة تزن 8 أطنان فقط . والجدول التالى يوضح توزيع أحمال 100 فرن خلال صب السبائك من الفرن .

التكرار	وزن الصلب فى الفرن (بالأطنان)
1	190.0 وأقل من 192.5
4	192.5 وأقل من 195.0
8	195.0 وأقل من 197.5
19	197.5 وأقل من 200.0
36	200.0 وأقل من 202.5
20	202.5 وأقل من 205.0
8	205.0 وأقل من 207.5
4	207.5 وأقل من 210.0

المطلوب :

نسق التوزيع التكرارى السابق لأوزان السبائك غير الكاملة ، واحسب الوسط الحسابى .

(جـ م م الأساس ب : يونيو ١٩٧٥)

تمرين ٨ ـ ٢ ـ ٢ شركة طيران مطالبة بتقدير زمن الدوران اللازم لنقل بعض الواردات والصادرات لمواد قابلة للكسر .

وقد أمد مدير التعاقدات إدارة المحاسبة بالتحليل التالى لأزمنة الدورات اللازمة لنقل مثل هذه البضائع خلال فترة زمنية طولها اثنا عشر شهراً .

التكرار	زمن الدورة بالساعات
25	أقل من 2
36	2 وأقل من 4
66	4 وأقل من 6
47	6 وأقل من 8
26	8 وأقل من 10
18	10 وأقل من 12
2	12 وأقل من 14

والمطلوب هو ايجاد الوسط من التوزيع المعطى السابق .

(م م ت أ ـ الأساس ب : مايو ١٩٧٩)

٨ ـ ٣ الوسيط

(أ) بيانات غير مبوبة

لايجاد الوسيط لفئة من الأرقام نرتب هذه الأعداد ترتيبا تصاعديا ونختار العدد الذى فى الوسط . فيكون الوسيط لهذه المجموعة هو قيمة العدد الذى يقع فى الوسط .

مثلا 4 ، 9 ، 1 ، 6 ، 7 لها وسيط 6 .

وهذه الأعداد بعد ترتيبها تصاعديا تصبح 1 ، 4 ، 6 ، 7 ، 9 والعدد 6 هو الذى يقع فى الوسط .

مثلا 1 ، 3 ، 4 ، 7 ، 7 ، 8 ، 8 ، 10 ، 11 لها وسيط 7 .

وهذه الأعداد من البداية مرتبة تصاعدياً ، وقيمة الرقم الذى فى الوسط هو 7 . ولا يهم إذا كان الرقم 7 مكرراً فى الفئة .

فى المثالين السابقين قد أخذنا فى الأعتبار أعدادا فردية من المفردات . أما إذا كان عدد المفردات زوجيا ، فالتعريف المعطى سابقا لابد أن يعدل قليلا . فى هذه الحالة سوف نرتب القيم ترتيبا تصاعديا ، ونختار العددين اللذين فى المنتصف ، والوسيط يكون الوسط الحسابى لهذين العددين .

فمثلا 9 ، 7 ، 5 ، 2 ، 12 ، 14 لها الوسيط 8 .

وذلك عند ترتيبها تكون 2 5 7 9 12 14 والقيمتان اللتان فى المنتصف هما 7 و 9 وهذان العددان متوسطهما 8 .

ومثلا 3 ، 4 ، 7 ، 7 ، 8 ، 10 ، 11 ، 12 لها الوسيط 7½ .

وحيث أن هذه الأعداد من الأصل مرتبة ترتيبا تصاعديا ، والقيمتان اللتان . فى المنتصف هما 7 و 8 وهذان العددان متوسطهما يساوى 7½ .

فى الأمثلة السابقة التى دُرست حتى الآن كان عدد المفردات صغيرا حتى نستطيع أن نرتبهم على ورقة ، أو بمجرد الملاحظة .

اعتبر الآن لدينا عددا كبيرا من المفردات ، ونريد أن نجد الوسيط لها ، فمثلا ،

83	80	91	81	88	82	87	97	83	99
~~75~~	85	~~72~~	92	84	90	87	78	93	98
86	80	93	86	88	83	82	~~101~~	89	82
85	95	80	89	84	92	76	81	~~103~~	94

أولا : أشطب أكبر عدد من هذه المجموعة (أى 103)
ثم أشطب أصغر رقم من هذه المجموعة (أى 72) .
وبعد ذلك أشطب العدد الثانى فى الكبر (أى 101) .
ثم اشطب العدد الثانى فى الصغر (أى 75) ، وهكذا .

استمر بهذه الطريقة ، وأشطب على التوالى القيم الكبرى والصغرى من الأرقام الباقية كل مرة ، وهكذا حتى يبقى عدد واحد فقط (أو عددان اذا كان العدد الكلى للمفردات زوجيا) . وهذا يعطى الوسيط .

وبالنسبة للمثال السابق ، فالعددان المتبقيان بعد اجراء هذه العملية هما 86 فهذا يعنى أن الوسيط للفئة السابقة المكونة من 40 عددا هو

$$\frac{86 + 86}{2} = 86$$

والوسيط لمجموعة من الأعداد يمثل عامة بالمرمز $\tilde{x}$ (وتقرأ x تيلدا) .

(ب) بيانات مبوبة

كما هو فى حالة البيانات غير المبوبة فان الوسيط هو القيمة التى فى المنتصف . أى أنه هو القيمة التى أقل منها نصف المفردات ، وأكبر منها نصف المفردات الآخر .

ومعنى هذا لايجاد الوسيط لمجموعة من البيانات المبوبة لابد أن نستعمل الجدول التكرارى المتجمع ، أو المضلع التكرارى المتجمع المناظر . وأولا سوف نحصل على الوسيط من المضلع التكرارى المتجمع فلاحظ كيف أن هذه الطريقة هى أمتداد لحساب الوسيط من الجدول التكرارى المتجمع .

وسوف نعتبر المثال التالى :

شركة دولية تفحص الطلبيات الواصلة من المنافذ التجارية الأوربية التابعة لها ، وقد صنفت المعلومات على الوجه التالى :

ثمن الطلبيات الواصلة يوليو ١٩٧٧

عدد الطلبيات فى الشهر £000s	عدد المنافذ التجارية
180 و < 220	10
220 و < 260	30
260 و < 300	20
300 و < 340	50
340 و < 380	40
380 و < 420	30
420 و < 460	20

(البيانات من م م ت أ . الأساس ب . نوفمبر ١٩٧٨)

وإدارة الشركة ترغب فى تعيين الوسيط الشهرى لثمن الطلبيات ، وذلك للشراء ، وتثبيت الخصومات للمنافذ التجارية .

الخطوة الأولى هى : تكوين الجدول التكرارى المتجمع .

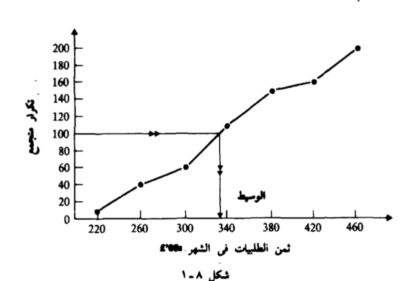
ثمن الطلبيات فى الشهر £000s	ts: عدد المنافذ التجارية
أقل من 220	10
أقل من 260	40
أقل من 300	60
أقل من 340	110
أقل من 380	150
أقل من 420	180
أقل من 460	200

ويمكننا من هذا الجدول رسم منحنى تكرارى متجمع ، كما هو موضح فى شكل ٨ - ١ .

التكرار الكلى يساوى 200 ولكى نحصل على الوسيط نقسم هذا المقدار على 2 فنحصل فى هذه الحالة على 100 . ومن ثم نرسم خطا مستقيما عند القيمة 100 من محور التكرار المتجمع الى المضلع التكرارى المتجمع . وباسقاط مستقيم من المضلع التكرارى المتجمع الى المحور الأفقى فنحصل على الوسيط .

والرسم البيانى يوضح هذه الطريقة للحصول على الوسيط ، ولكن إذا استخدمت هذه الطريقة فى التطبيق العملى ، فيتطلب رسم المضلع التكرارى المتجمع على مقياس كبير من ورق الرسم البيانى للحصول على الدقة المعقولة .

وسوف ندرس الرسم البيانى السابق مرة ثانية . وذلك لكى نرى كيفية استنتاج صورة لحساب الوسيط . وحيث أن نصف التكرار 100 يقع بين التكرارين 60 و 110 فى الجدول التجميعى ، الوسيط لابد أن يقع بين الحدود الحقيقية للفئة (300 و 340) التى تناظر التكرارات التجميعية للأثنين . الفئة من "300 وأقل من 340" تسمى فئة الوسيط . وإذا كان نصف التكرار قريبا من 60 فكان لابد أن نتوقع أن الوسيط أقرب الى 300 بينما اذا كان نصف التكرار أقرب فعليا الى 110 منها الى 60 فكان لابد أن نتوقع أن الوسيط قريب من 340 أى أنه قد كونا فكرة أن المسافة التى نحتاج أن نتحركها الى نصف التكرار لكى نصل الى الوسيط تتناسب مع مقدار بعدها عن تكرار الحد الحقيقى الأدنى لفئة الوسيط .



شكل ٨ ـ ١

وفى هذه الحالة نجد أن

$$\tilde{x} = 300 + \frac{100 - 60}{110 - 60} \times 40 = 300 + \frac{40}{50} \times 40$$

أى أن

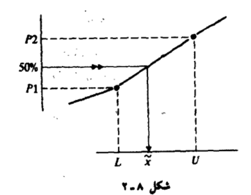
$$\tilde{x} = 300 + 32 = 332$$

وعلى هذا الوسيط لمقدار الطلبية الشهرية هو 000 332 £ .

اعتبر بصورة أعم أن المقادير التالية حقيقية :

أكبر تكرار فى الجدول التكرارى المتجمع والذى أقل من قيمة 50% هو $P1$.
التكرار التالى فى الكبر بالجدول التكرارى المتجمع هو $P2$.
حد الفئة الحقيقى المناظر لـ $P1$ هو L .
حد الفئة الحقيقى المناظر لـ $P2$ هو U .

هذه الحالة موضحة بالشكل ٨ ـ ٢



شكل ٨ ـ ٢

ثم بنفس التحليل المستخدم فى المثال السابق نستطيع أن نحصل على الصورة العامة التالية للوسيط

$$\tilde{x} = L + \frac{(50\% - P1)}{(P2 - P1)} \times (U - L)$$

تمرين ٨ ـ ٣ ـ ١ فيما يلى توزيع لدخول عمال ذوى كفاءة متوسطة لمدة أسبوع فى 1977 :

الدخول الأسبوعية £	£	عدد العمال
30 >	20 و	5
40 >	30 و	26
50 >	40 و	41
60 >	50 و	58
70 >	60 و	48
80 >	70 و	18
90 >	80 و	4

أوجد الوسيط للدخل الأسبوعى :
(١) بالرسم مستعملا المضلع التكرارى ،
(٢) بالحساب .

(م م ت أ ـ الأساس ب : نوفمبر ١٩٧٧)

٨ ـ ٤ المنوال

(أ) بيانات غير مبوبة

المنوال لفئة من الأعداد هو العدد الذى يتكرر فى الفئة أكثر من أى عدد آخر .

لنفرض أن داين له طفلان ، هيلارى له 3 جانيس له 4 براند له 2 وليندا لها واحد . العدد الأكثر حدوثا هو 2 . وهذا يعنى أن 2 هو العدد المنوالى للأطفال .

مثال ما هو منوال الأعداد 5 ، 9 ، 7 ، 14 ، 8 ، 7 ، 3 ؟

المنوال هو العدد 7 لأنه يحدث مرتين ، ولا يوجد أى عدد آخر يحدث أكثر من مرة .

(ب) بيانات مبوبة

منوال فئة البيانات المبوبة يمكن أن نحصل عليه بالرسم البيانى ، أو بالحسابات . الخطوة الأولى فى كلتا الحالتين هو ايجاد الفئة المنوالية .

وفى حالة البيانات حيث جميع الفئات لها نفس الطول ، فالفئة المنوالية هى الفئة ذات أكبر تكرار . أعتبر المثال التالى :

أثناء الجلسات المنعقدة بالفترة الزمنية 1977 — 1978 كليه بها 70 فصلا مختلفا منها 44 « علمى » بمتوسط 15.2 حجم الفصل 26 « أدبى » بمتوسط 19.2 حجم الفصل . التوزيعات التكرارية لحجم الفصل معطاه على النحو التالى :

حجم الفصل (عدد الطلبة)	عدد الفصول العلمية	عدد الفصول الأدبية
1– 6	4	0
7–12	15	3
13–18	11	10
19–24	8	8
25–30	5	4
31–36	1	1
	44	26

لا يوجد أى طالب ينتمى لأكثر من فصل .

(البيانات مأخوذة من ج م م - الأساس ب : يونيو - ١٩٨٠)

لاحظ أن فى هذا الجدول الفئات ليست منتظمة بنفس الطريقة كما فى المسألة السابقة . وفى هذه الحالة القيم : 1 ، 7 ، 13 ، 19 ، 25 ، 31 هى حدود دنيا للفئات والقيم 6 ، 12 ، 18 ، 24 ، 30 ، 36 هى حدود عليا للفئات . وللفئات المعطاه بهذه الطريقة فان مركز الفئة هو متوسط الحدود العليا ، والحدود الدنيا للفئات . وحدود الفئة الحقيقية هى القيم التى فى المنتصف بين الحد الأعلى لفئة ما والحد الأدنى للفئة اللاحقة .

ولهذه الفئة من البيانات سوف نجد المنوال لحجم الفصل العلمى . الطريقة البيانية تتضمن رسم المدرج التكرارى ، ونعمل التوصيلات الواضحة فى شكل ٨ - ٣ على المستطيل المناظر للفئة المنوالية . (من تعريف الفئة المنوالية نرى أنها سوف تناظر دائما أطول مستطيل بالمدرج التكرارى) .

واذا كانت هذه الوسيلة تستعمل عمليا لايجاد المنوال فالمدرج التكرارى لابد أن يرسم بدقة على ورق رسم بيانى .

وبالضبط مثل الوسيط فان التوصيلات يمكن أن يعبر عنها بمعادلة . واستخراج المعادلة معقد بعض الشىء ، ولذا سنكتفى باعطاء الصيغة المطلوبة .

أفرض أن :

L هو الحد الأدنى الحقيقى للفئة المنوالية ،

U هو الحد الأعلى الحقيقى للفئة المنوالية ،

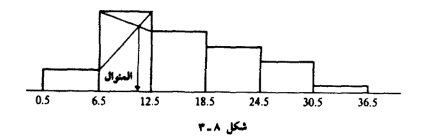
f_m هو تكرار الفئة المنوالية ،

f_{m-1} هو تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية ،

f_{m+1} هو تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية .

فالمنوال يعطى بالصورة التالية

$$\text{المنوال} = L + \frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})} \times (U - L)$$



شكل ٨ - ٣

للفصول العلمية نجد أن $f_{m+1}=11$ ، $f_m=15$ ، $f_{m-1} = 4$ ، $U=12.5$ ، $L=6.5$. فالمعادلة تدل على أن المنوال لحجم الفصل العلمى هو

$$6.5 + \frac{15 - 4}{(15 - 4) + (15 - 11)} \times (12.5 - 6.5)$$

$$= 6.5 + \frac{11}{11 + 4} \times 6 = 6.5 + \frac{66}{15} = 6.5 + 4.4 = 10.9$$

المنوال لحجم الفصل العلمى هو 10.9 طالب .

وفى هذه الحالة المنوال أكبر من مركز الفئة المنوالية لأن المستطيل الذى يقع على يمين مستطيل الفئة المنوالية أطول من الذى يقع على شماله ، فهذا يعنى أن المنوال سوف يكون أصغر من مركز الفئة المنوالية .

تمرين ٨ - ٤ - ١ فى المثال السابق أوجد المنوال لحجم الفصل الأدبى :

١ - بيانيا ،

٢ - باستخدام صورة المعادلة .

٨ - ٥ مقارنة المقاييس المركزية

الفائدة الأساسية للوسط الحسابى فى أنه يوجد له نظرية رياضية تقف خلفه ، والتى تجعله أكثر فائدة فى الأعمال الاحصائية عن الوسيط والمنوال . (سوف نوضح فائدة واستعمالات الوسط الحسابى فى الفصل الخامس عشر ، والسادس عشر) . أيضا كل مفردة فى فئة البيانات تستخدم فى ايجاد قيمة الوسط الحسابى .

ولبعض مجموعات البيانات فإن الوسط الحسابى هو قيمة ليست قريبة من وسط الجسم الأساسى للبيانات . فهو ليس مقياسا مقبولا للنزعة المركزية فى تلك الحالات . ويمكن أن يحدث هذا عند وجود بعض القيم القليلة بعيدة عن القيم الباقية . وجميع القيم تدخل فى حساب قيمة الوسط الحسابى والوسط الحسابى يمكن أن يُجذب تجاه تلك القيم القليلة .

إعتبر المجموعة التالية من قيم أجور أسبوعية بالجنيهات لستة من العمال فى قسم صيانة بشركة صغيرة :

60, 62, 64, 65, 69, 100

الوسط الحسابى هو 70 ولكن هذه القيمة ليست مقياسا مقنعا للنزعة المركزية . لأن خمسا من القيم أقل منها . والقيم المتطرفة تستعمل فى حالة البيانات الاقتصادية ، وفى هذه الحالة فان الوسيط ، وليس الوسط الحسابى يكون مقياسا أكثر مناسبة .

الوسيط لا يتأثر بتفاوت القيم للبيانات ، فقيمته تتحدد بمنتصف المفردات فقط . وفائدة أخرى للوسيط هى أنه لا يحتاج اى حسابات أكثر من متوسط عددين . والعيب فى استخدام الوسيط أنه لا يوجد نظرية رياضية صريحة تتعلق به ، وهذا يعنى أنه لا يمكن أن يستخدم فى معالجات أكثر صعوبة .

والمنوال يلجأ اليه بديهيا كمقياس للنزعة المركزية . والقيمة التى يأخذها تقع بالفعل فى الفئة ، وسوف يكون مقبولا ظاهرياً بالنسبة لمركز البيانات . وبالاضافة إلى ذلك فان المنوال لا يحتاج الى حسابات .

وفائدة أخرى للمنوال أنه يمكن أن يستعمل أيضا فى حالة البيانات غير العددية . ولقد درسنا مثالا سابقا لعدد أطفال : ديان ، هيلارى ، برندا ، ليندا ، جيليان ، وجانيس . وكان يمكن أن يخص المنوال صفات أخرى لهؤلاء الأشخاص مثل لون شعرهم . أفترض أن ـ هيلارى ، برندا ، ليندا شعرهم أصفر وديان وجيليان شعرهما أسود ، أما جانيس فشعرها زنجبيلى اللون . ويمكن أن نقول : أن منوال لون الشعر هو الأصفر . والكلام عن متوسط لون الشعر ، أو وسيط اللون لا معنى له .

ولكى نرى المشكلة الكبرى المتعلقة بالمنوال للبيانات المبوبة ، أعتبر أن علينا أن نجد المنوال للأعداد

5, 8, 7, 14, 8, 7, 3

كل من العددين 7 و 8 يظهران كما لو كانا منوالا ، وذلك لأن كلا منهما يحدث مرتين ولا يحدث عدد آخر أكثر من مرة . ويمكن أن يعتبرا منوالين ، والبيانات فى هذه الحالة تسمى ثنائية المنوال .

وبصورة أعم يمكن أن يوجد أكثر من منوال فى فئة من البيانات والبيانات فى هذا النوع تعرف بأنها متعددة المنوال .

ولهذا ، فإن المشكلة الرئيسية بالنسبة للمنوال كمقياس للنزعة المركزية أنه لا يعرف أحيانا بطريقة وحيدة .

وأيضا المنوال يشارك الوسيط فى عيب فقدانه لخواص رياضية مباشرة .

٨ ـ ٦ الانحراف المعيارى

هذا مقياس للتشتيت ، أو الانحراف . وهو يقيس تشتت مجموعة من البيانات . وهو مرتبط إلى حد كبير بالوسط الحسابى ، لأنه يعتمد على انحراف كل قيمة للبيانات عن الوسط الحسابى لها . وبنفس الطريقة التى أعتبرت للمقاييس المركزية سوف نبحث عن الأنحراف المعيارى أولا ، بالنسبة للبيانات غير المبوبة ، ثم بالنسبة للبيانات المبوبة .

(أ) بيانات غير مبوبة

اذا كان لدينا n من الأعداد x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . ، x_n لها وسط حسابى $\bar{x}$ فالانحراف المعيارى يعتمد على الفروق .

$$x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, x_3 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}$$

وإذا كانت قيم البيانات مجمعة باحكام ، فكل هذه الفروق سوف تكون صغيرة ، ولكن اذا كانت قيم البيانات متباعدة ، فبعض الفروق سوف يكون كبيرا . والحالتان ممثلتان فى شكل ٨ ـ ٤ .

وأنه يكون واقعيا أن نستعمل « المتوسط » لهذه الفروق كمقياس للتغير .

وليس من المفيد أن نجد الوسط الحسابى لهذه الفروق ، وذلك لأنه لأى فئة من البيانات ، فالفروق السالبة ، والموجبة سوف تلاشى بعضها ، والنتيجة تكون صفرا .

وللحصول على الانحراف المعيارى ، أى « متوسط » الفروق نتبع الطريقة التالية :

١ ـ أوجد مربعات كل الفروق . وهذا يلغى الأشارات السالبة وسوف نحصل على

$$(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, (x_3 - \bar{x})^2, \ldots, (x_n - \bar{x})^2$$

٢ ـ أوجد متوسط مربعات الفروق

$$\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

بيانات متباعدة جدا $\bar{x}$

بيانات مجمعة باحكام $\bar{x}$

شكل ٨ ـ ٤

هذه نفسها مقياس للتغير وتعرف بالتباين . والمشكلة فى التباين أن وحدته هى مربع وحدات البيانات .

٣ ـ أوجد الجذر التربيعى للنتيجة فى الخطوة ٢ . فهذا يعطى الانحراف المعيارى .

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

والذى له نفس الوحدات مثل وحدات البيانات . نستعمل رمز السيجما فنحصل على

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}}$$

مثال ٨ ـ ٦ ـ ١ أوجد الانحراف المعيارى للقيم 3 ، 5 ، 2 ، 9 ، 11 ؟

الاجابة :

$$\bar{x} = \frac{3+5+2+9+11}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

والفروق هى 6 − 3 ، 6 − 5 ، 6 − 2 ، 6 − 9 ، 6 − 11 .
أى 3 − ، 1 − ، 4 − ، 3 ، 5 .
(ملاحظة المجموع= صفرا) . وهذا يعنى أن

$$s = \sqrt{\frac{(-3)^2 + (-1)^2 + (-4)^2 + 3^2 + 5^2}{5}} = \sqrt{\frac{9+1+16+9+25}{5}} = \sqrt{\frac{60}{5}}$$
$$= \sqrt{12} = 3.46$$

تمرين ٨ ـ ٦ ـ ١ أوجد الانحراف المعيارى للقيم 4 ، 2 ، 8 ، 7 ، 4 ، 5 ؟

بفرض أن الحسابات المعدلة السابقة لقيم s ليست جيدة لأنها تحتوى على إيجاد كل الفروق المنفردة عن الوسط الحسابى . وأنه فى العادة أن نطبق الصورة التالية التى وصلنا اليها بمعالجة جبرية بسيطة للصورة السابقة .

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

مثال ٨ ـ ٦ ـ ٢ أوجد مرة أخرى الأنحراف المعيارى للقيم 3 ، 5 ، 2 ، 9 ، 11 ؟

الاجابة :

$$n = 5, \Sigma x = 3+5+2+9+11 = 30,$$

$$\Sigma x^2 = 9+25+4+81+121 = 240$$

وبالتالى :

$$s = \sqrt{\frac{240}{5} - \left(\frac{30}{5}\right)^2} = \sqrt{48 - 6^2} = \sqrt{48 - 36} = \sqrt{12} = 3.46$$

تمرين ٨ ـ ٦ ـ ٢ استخدم الصورة الحسابية لايجاد الانحراف المعيارى للأعداد 4 ، 2 ، 8 ، 7 ، 4 ، 5 ؟

(ب) بيانات مبوبة

الانحراف المعيارى للبيانات المبوبة يعرف كامتداد للانحراف المعيارى للبيانات غير المبوبة أى أننا نتصرف كما لو أن كل عضو فى الفئة يساوى مركز الفئة ، ونستمر كما فى حالة البيانات غير المبوبة . افترض مرة أخرى التوزيع التكرارى والتالى لأوزان 150 مسمار قلاووظ :

التكرار	الوزن (بالأوقية)
4	5.00 وأقل من 5.01
18	5.01 وأقل من 5.02
25	5.02 وأقل من 5.03
36	5.03 وأقل من 5.04
30	5.04 وأقل من 5.05
22	5.05 وأقل من 5.06
11	5.06 وأقل من 5.07
3	5.07 وأقل من 5.08
1	5.08 وأقل من 5.09

(بيانات مأخوذة من ج م م- الأساس ب- يونيو ١٩٧٨)

مراكز الفئات لهذه الفئات هى 5.005 ، 5.015 ، 5.025 ، 5.035، 5.045 ، 5.055 ، 5.065 ، 5.075 ، 5.085 وعند ايجاد الانحراف المعيارى للبيانات المبوبة سوف نعامل الجدول كأنه ينص على أن 4 مسامير قلاووظ تزن 5.055 أوقية ، و 18 مسمار يزن 5.015 أوقية . وهكذا ، الوسط الحسابى للأوزان وجد فى البند ٨ ـ ٢ ، وكان مساويا 5.038 أوقية . وطبقا للصورة الأولية للانحراف المعيارى نجد أن

$$s = \sqrt{\frac{(5.005 - 5.038)^2 + (5.005 - 5.038)^2 + (5.005 - 5.038)^2 + (5.005 - 5.038)^2 + (5.015 - 5.038)^2 + \ldots + (5.085 - 5.038)^2}{4 + 18 + \ldots + 1}}$$

والتى يمكن أن تكتب بصورة أفضل كما يلى :

$$s = \sqrt{\frac{4 \times (5.005 - 5.038)^2 + 18 \times (5.015 - 5.038)^2 + \ldots + 1 \times (5.085 - 5.038)^2}{4 + 18 + \ldots + 1}}$$

وبصورة عامة نجد أن امتداداً لحالة البيانات المبوبة من الصورة الأصلية لتعريف الانحراف المعيارى هى

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f(x - \bar{x})^2}{\Sigma f}}$$

حيث أن x's هى مراكز الفئات و f's هى تكرارات الفئات . وباستخدام الصورة الحسابية بنفس الطريقة للبيانات نجد أن :

$$s = \sqrt{\frac{5.005^2 + 5.005^2 + 5.005^2 + 5.005^2 + 5.015^2 + \ldots + 5.085^2}{4 + 18 + \ldots + 1} - 5.038^2}$$

والتى يمكن أن تكتب بصورة أفضل كما يلى:

$$s = \sqrt{\frac{4 \times 5.005^2 + 18 \times 5.015^2 + \ldots + 1 \times 5.085^2}{4 + 18 + \ldots + 1} - 5.038^2}$$

وبصورة عامة نرى أن امتدادا للبيانات المبوبة لحساب الصورة الحسابية للانحراف المعيارى هى

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}\right)^2}$$

حيث أن $x's$ هى مراكز الفئات و $f's$ هى تكرارات الفئات . وكما هو متبع عند حساب الوسط الحسابى للبيانات المبوبة فى البند ٨ ـ ٢ ، فإن الطريقة المعتادة عمليا هو أن نكون جدولا وتستخدم طريقة معدلة لتسهيل العملية الحسابية . والتعديل بالضبط كما هو فى البند ٨ ـ ٢ ، أى نجد لكل مركز فئة x القيمة المعدلة

$$d = \frac{x - a}{c}$$

حيث a تسمى الوسط الحسابى الافتراضى و c هو طول كل فئة البيانات . بعد هذا نحسب الانحراف المعيارى s_d للقيم d . وهذا التحويل يستخدم لايجاد s أى الانحراف المعيارى للبيانات الأصلية بطريقة أسهل . وببساطة نضرب المقدار فى c لنحصل على

$$s = c \cdot s_d$$

فالانحراف المعيارى لأوزان 150 مسمار قلاووظ قد حسب فى الجدول التالى باستخدام الوسط الحسابى الافتراضى $a=5.045$.

الوزن (بالأوقية)	التكرار f	مركز الفئة x	$d = \frac{x - 5.045}{0.01}$	fd	fd^2
5.00 وأقل من 5.01	4	5.005	−4	−16	64
5.01 وأقل من 5.02	18	5.015	−3	−54	162
5.02 وأقل من 5.03	25	5.025	−2	−50	100
5.03 وأقل من 5.04	36	5.035	−1	−36	36
5.04 وأقل من 5.05	30	5.045	0	0	0
5.05 وأقل من 5.06	22	5.055	1	22	22
5.06 وأقل من 5.07	11	5.065	2	22	44
5.07 وأقل من 5.08	3	5.075	3	9	27
5.08 وأقل من 5.09	1	5.085	4	4	16
	$\Sigma f = 150$			$\Sigma fd = -99$	$\Sigma fd^2 = 471$

$$s_d = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}\right)^2} = \sqrt{\frac{471}{150} - \left(\frac{-99}{150}\right)^2} = \sqrt{3.14 - 0.3456} = 1.6445$$

وبالتالى :

$$s = c \cdot s_d = 0.01 \times 1.6445 = 0.016445$$

ويكون الانحراف المعيارى لأوزان المسامير القلاووظ هو 0.016 أوقية .

الانحراف المعيارى مقياس هام للتغير عمليا ، وذلك نتيجة لمميزاته الرياضية التى تسمح باستنتاج نتائج ذات قيمة . والوسط الحسابى والانحراف المعيارى يعطيان معا ملخصا قويا لمجموعة البيانات . وعلى أى الأحوال فان القيم الشاذة تؤثر فى الانحراف المعيارى .

وتوجد نتيجة هامة حصل عليها تشبتشيف Chebyshev التى تنص على أن لأى مجموعة من البيانات فان نسبة القيم الواقعة فى الفترة التى تحوى الوسط الحسابى والتى حدودها تبعد عنه بمقدار k من وحدات الانحراف هى على الأقل $1 - (1 / k)^2$. وبالتالى على سبيل المثال يقع على الأقل 3/4 القيم بين 2 من الانحرافات المعيارية من الوسط الحسابى . هذه نتيجة محافظة فاذا كانت البيانات تقترب من أى طريق من توزيع طبيعى فاننا يمكن أن نحصل على نصوص أكثر قوة . وسوف يصادفنا هذه النصوص عندما ندرس التوزيع الطبيعى بالبند ١٤ ـ ٦ ، وسوف نرى فائدة الوسط الحسابى والانحراف المعيارى فى حساب حدود الثقة وتكوين اختبارات معنوية فى الفصلين الخامس عشر ، والسادس عشر . على التوالى .

تمرين ٨ ـ ٦ ـ ٣ فيما يلى توزيع لدخول عمال ذوى كفاءة متوسطة لمدة أسبوع فى سنة ١٩٧٧ .

عدد العمال	الدخول الأسبوعية £ £
5	20 وأقل من 30
26	30 وأقل من 40
41	40 وأقل من 50
58	50 وأقل من 60
48	60 وأقل من 70
18	70 وأقل من 80
4	80 وأقل من 90

احسب الانحراف المعيارى لهذه الفئة من البيانات وأشرح معنى النتيجة التى تحصل عليها .
(م م أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٧)

٨ ـ ٧ المقاييس الأخرى للانحراف

أبسط مقياس ممكن للانحراف من فئة البيانات هو المدى الذى يحسب بإيجاد الفرق بين أصغر قيمة ، وأكبر قيمة بالفئة . الحساب سهل ، ولكن هذا المقياس غير صالح فى حالة القيم المنحرفة للبيانات . وبصورة عامة فانه ليس ذا قيمة فى التحليلات المتقدمة للبيانات .

وتستثنى العينة الصغيرة الخاصة بضبط جودة الانتاج من الحكم السابق . ولذا فسوف نفرض هنا عينات مكونة من 4 أو 5 عناصر سحبت من خط إنتاجى وقيست بعض الأبعاد والمدى فى قيم هذه الأبعاد لهذه العينات يمكن أن يستخدم لرسم خريطة الضبط ، حيث أن العينات بمثل هذا الحجم يكون المدى مرتبطا بطريقة بسيطة بالإنحراف المعيارى للعينة . أنظر الفصل الثامن عشر لتوضيح خرائط الضبط .

ومقياس آخر للتغير ، مشابه عموما للإنحراف المعيارى من حيث أنه يعتمد على انحراف كل قيمة عن الوسط

الحسابى للقيم وهو الانحراف المتوسط . وسوف نحصل عليه أولا فى حالة البيانات غير المبوبة ثم فى حالة البيانات المبوبة .

وبالنسبة للبيانات غير المبوبة خذ مرة أخرى البيانات المكونة من n من الأعداد x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . . . ، x_n والوسط الحسابى لها هو $\bar{x}$ والانحرافات التى نبنى عليها مقياسا للتغير تعتمد على

$$x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, x_3 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}$$

وكما رأينا فى البند ٨ ـ ٦ أنه ليس جيدا أن نأخذ الوسط الحسابى لهذه القيم حيث أنه دائما يساوى صفرا . ولايجاد الانحراف المعيارى نربع هذه الانحرافات ونحسب الوسط الحسابى لهذه المربعات ثم نأخذ الجذر التربيعى لها . أما طريقة الحصول على الأنحراف المتوسط فهى أكثر بساطة . فكل ما فى الأمر علينا أن نهمل كل الاشارات السالبة بين هذه الانحرافات ونوجد متوسط القيم المطلقة .
القيمة المطلقة لعنصر ما نرمز لها بخطين عمودين نضع بينهما القيمة . أى أن الانحراف المتوسط يعطى بالمعادلة التالية

$$MD = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

وإذا استخدمنا علامة السيجما نحصل على

$$MD = \frac{\Sigma |x - \bar{x}|}{n}$$

مثال ٨ ـ ٧ ـ ١ أوجد الانحراف المتوسط للاعداد التالية 3 ، 5 ، 2 ، 9 ، 11
الاجابة : الوسط الحسابى للأعداد هو $\bar{x}=6$ من ثم فان فروق هذه الأرقام عن وسطها الحسابى هى

$$3 - 6, 5 - 6, 2 - 6, 9 - 6, 11 - 6$$

أى أن

$$-3, -1, -4, 3, 5$$

اذن الفروق المطلقة هى

$$|3 - 6| = 3, |5 - 6| = 1, |2 - 6| = 4, |9 - 6| = 3, |11 - 6| = 5$$

وعلى هذا فان الانحراف المتوسط يكون

$$MD = \frac{3 + 1 + 4 + 3 + 5}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$$

تمرين ٨ ـ ٧ ـ ١ أوجد الانحراف المتوسط للاعداد التالية 4 ، 2 ، 8 ، 7 ، 4 ، 5
أما بالنسبة للبيانات المبوبة ، فأننا نسلك نفس المنهج المتبع لحساب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للبيانات المبوبة . ويفرض أن كل عنصر من فئة البيانات يساوى مركز الفئة لهذه الفئة . وبعد ذلك نستمر فى الاجراءات

مثل ما هو متبع للبيانات غير المبوبة . وباستخدام نفس المنطق المتبع فى الحالات السابقة وذلك بفرض أن مركز الفئة x وتكرارات الفئة f فإن الانحراف المتوسط يعطى بالصورة التالية

$$MD = \frac{\Sigma f\,|x - \bar{x}|}{\Sigma f}$$

وباستخدام نفس الرموز الموجودة فى الحالات الخاصة بحساب الوسط والانحراف المعيارى للبيانات المبوبة . أى أننا نفرض الوسط الافتراضى a وطول الفئة c للفئات لتعديل مراكز الفئة x الى $d=(x-a)/c$ ثم نحسب الانحراف المتوسط MD_d للمتغيرات d's أى أن

$$MD_d = \frac{\Sigma f\,|d - \bar{d}|}{\Sigma f}$$

والعودة الى حساب الانحراف المتوسط للبيانات الأصلية يتضمن نفس الخطوات التى اتبعت لحساب الانحراف المعيارى ، وذلك بضرب القيمة السابقة فى مقدار طول الفئة c . وعلى هذا النمط نحصل على

$$MD = c \cdot MD_d$$

ومرة أخرى يمكن وضعها فى صورة جدول .

افترض مرة أخرى التوزيع التكرارى التالى لأوزان 150 مسمار قلاووظ .

التكرار	الوزن (بالأوقية)
4	5.00 وأقل من 5.01
18	5.01 وأقل من 5.02
25	5.02 وأقل من 5.03
36	5.03 وأقل من 5.04
30	5.04 وأقل من 5.05
22	5.05 وأقل من 5.06
11	5.06 وأقل من 5.07
3	5.07 وأقل من 5.08
1	5.08 وأقل من 5.09

(البيانات مأخوذة من جـ م م الأساس ب ـ يونيو ١٩٧٨)

وحساب الانحراف المتوسط يمكن الحصول عليه على النحو التالى :

$f\,\|d-\bar{d}\|$	$\|d-\bar{d}\|$	fd	$d = \frac{x - 5.045}{0.01}$	مركز الفئة x	التكرار f	الوزن (بالأوقية)
13.36	3.34	−16	−4	5.005	4	5.00 وأقل من 5.01
41.12	2.34	−54	−3	5.015	18	5.01 وأقل من 5.02
33.50	1.34	−50	−2	5.025	25	5.02 وأقل من 5.03
12.24	0.34	−36	−1	5.035	36	5.03 وأقل من 5.04
19.80	0.66	0	0	5.045	30	5.04 وأقل من 5.05
36.52	1.66	22	1	5.055	22	5.05 وأقل من 5.06
29.26	2.66	22	2	5.065	11	5.06 وأقل من 5.07
10.98	3.66	9	3	5.075	3	5.07 وأقل من 5.08
4.66	4.66	4	4	5.085	1	5.08 وأقل من 5.09
$\Sigma f\,\|d-\bar{d}\| = 202.44$		$\Sigma fd = -99$			$\Sigma f = 150$	

$$\bar{d} = \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} = \frac{-99}{150} = -0.66$$

وهذه القيمة نحن فى حاجة اليها لحساب قيم $d - \bar{d}$. والانحراف المتوسط للقيم $d's$ هو

$$MD_d = \frac{\Sigma f \mid d - \bar{d} \mid}{\Sigma f} = \frac{202.44}{150} = 1.3496$$

وعلى هذا الانحراف المتوسط لأوزان المسامير القلاووظ هو

$$MD = c \cdot MD_d = 0.01 \times 1.3496 = 0.013\ 496$$

أى أن الانحراف المتوسط لأوزان المسامير القلاووظ هو 0.013 أوقية .

وهذا المقياس يكون نسبيا سهلا فى حسابه . ولكنه نادر الاستعمال وذلك لأن دالة القيمة المطلقة يصعب التعامل بها الى حد ما رياضيا ، ولذا فانه لاتوجد نتائج بسيطة يمكن الحصول عليها من تفسيرات هذا المقياس كما هو الحال فى الانحراف المعيارى . الحسابات تعتمد على كل قيمة فى البيانات ، ومن ثم القيم المتطرفة سوف تميل الى تضخيم قيمة الانحراف المتوسط ، وعلى هذا فتأثيره أقل وضوحا من الانحراف المعيارى .

تمرين ٨-٧-٢ فيما يلى توزيع لدخول عمال ذوى كفاءة متوسطة لمدة أسبوع سنة ١٩٧٧ .

عدد العمال	الدخول الأسبوعية £ £
5	20 وأقل من 30
26	30 وأقل من 40
41	40 وأقل من 50
58	50 وأقل من 60
48	60 وأقل من 70
18	70 وأقل من 80
4	80 وأقل من 90

أحسب الانحراف المتوسط لهذه الفئة من البيانات .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٧)

مقياس آخر لانحراف التغير هو **الانحراف الربيعى** ، أو **نصف المدى الربيعى** . والاسم الثانى هو وصف كامل للمقياس . وهذا المقياس قريب جدا . الى الوسيط من حيث أن الوسيط هو الرقم التى تقع نصف البيانات أسفله والنصف الآخر أعلاه ، فهذا يعنى أن الربيعيات هى النقط الرباعية للبيانات . والربيع الأول نرمز له بالرمز $Q1$ يقع أدناه 25٪ من البيانات و75% من البيانات أعلى منه . والربيع الثانى هو الوسيط $\tilde{x}$ نفسه ، والربيع الثالث ، نرمز له بالرمز $Q3$ يقع أدناه 75% من البيانات و 25% أعلى منه .

وبمعلومية $Q1$ و $Q3$ فالانحراف الربيعى يحسب على النحو التالى :

$$QD = \frac{Q3 - Q1}{2}$$

وبالنسبة للبيانات غير المبوبة فان $Q1$ يمكن أن نحصل عليها بنفس الطريقة مثل الوسيط . أما بالنسبة للفئات الصغيرة من الأرقام فاننا نرتبها تصاعديا طبقا لرتبتها ونختار القيمة التى يقع أعلاها ثلاثة أضعاف القيم التى تقع أسفلها . أما بالنسبة للفئات الكبيرة من الأرقام فتشطب ، وأكبر ثلاثة أعداد على التوالى حتى يتبقى عدد وحيد . ونفس الشىء يتبع مع $Q3$.

وعلى أى الأحوال فان الانحراف الربيعى يستخدم عادة للبيانات المبوبة حيث أن الربيعيات توجد بنفس طريقة ايجاد الوسيط فى البند ٨ ـ ٣ . أى أنه يرسم مستقيمات عند 25% وعند 75% من مستويات التكرارات المتراكمة الى المضلع التكرارى المتجمع (أو جيف) ثم اسقاطهم على المحور الأفقى ، أو باستخدام القانون المكافىء .

افترض مرة أخرى التوزيع التكرارى التالى لأوزان 150 مسمار قلاووظ .

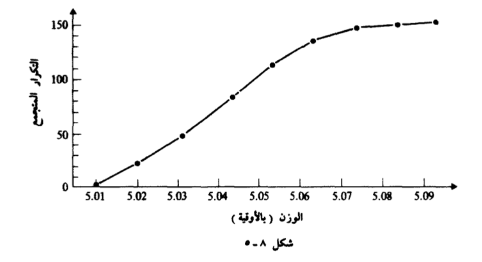
التكرار	الوزن (بالأوقية)
4	5.00 وأقل من 5.01
18	5.01 وأقل من 5.02
25	5.02 وأقل من 5.03
36	5.03 وأقل من 5.04
30	5.04 وأقل من 5.05
22	5.05 وأقل من 5.06
11	5.06 وأقل من 5.07
3	5.07 وأقل من 5.08
1	5.08 وأقل من 5.09

(البيانات من حـ م م الأساس ب ـ يونيو ١٩٧٨)

الجدول التكرارى المتجمع يكون على الصورة التالية

التكرار	الوزن (بالأوقية)
4	أقل من 5.01
22	أقل من 5.02
47	أقل من 5.03
83	أقل من 5.04
113	أقل من 5.05
135	أقل من 5.06
146	أقل من 5.07
149	أقل من 5.08
150	أقل من 5.09

والمضلع التكرارى المتجمع (أوجيف) من هذا الجدول يوضح فى الشكل ٨ ـ ٥ .



شكل ٨ ـ ٥

وبما أن التكرار الكلى هو 150 و 25% من هذه القيمة هى 37.5 و 75% من هذه القيمة هى 112.5 فأننا نرسم خطوطا أفقية عند هذه المستويات ، ثم نسقطها على المحور الأفقى . عند تطبيق هذه الطريقة يكون من الأفضل استخدام مقياس رسم كبير على ورق الرسم البيانى .

وباستخدام نفس المنطق ونفس الرموز ، كما استخدمت فى ايجاد الوسيط للبيانات المبوبة التى فى البند ٨ ـ ٣ فإننا يمكن أن نحصل على الصيغتين التاليتين للربيع الأول والربيع الثالث .

$$Q1 = L + \frac{(25\% - P1)}{(P2 - P1)} \times (U - L)$$

$$Q3 = L + \frac{(75\% - P1)}{(P2 - P1)} \times (U - L)$$

وفى هذا المثال بالنسبة للربيع الأول فان $Q1=25\%=37.5$ ، $P1=22$ ، $P2=47$، $L=5.02$ ، $U=5.03$ ؛ وعلى هذا فإن

$$Q1 = 5.02 + \frac{(37.5 - 22)}{(47 - 22)} \times (5.03 - 5.02) = 5.02 + \frac{15.5}{25} \times 0.01 = 5.02 + 0.0062 = 5.0262$$

وبالنسبة للربيع الثالث $Q3=75\%=112.5$ ، $P1=83$ ، $P2=113$ ، $L=5.04$ ، $U=5.05$. وعلى هذا فان

$$Q3 = 5.04 + \frac{(112.5 - 83)}{(113 - 83)} \times (5.05 - 5.04) = 5.04 + \frac{29.5}{30} \times 0.01 = 5.04 + 0.0098 = 5.0498$$

وبالتالى الانحراف الربيعى يكون

$$QD = \frac{Q3 - Q1}{2} = \frac{5.0498 - 5.0262}{2} = 0.0118$$

أى أن التغير فى الوزن من مسمار الى مسمار آخر ، كما هو مقاس بالـ QD يساوى 0.012 أوقية .

والانحراف الربيعى يتأثر بصورة أقل بالقيم المتطرفة عن مقاييس الانحرافات الأخرى السابقة لأنها تستبعد الربع الأسفل والربع الأعلى من البيانات . وهذه سمة قيمة ولكنها يعارضها البعض لأنها وسيلة متلفة لقياس التغير حيث أن نصف القيم لاتستخدم مباشرة فى الحسابات ، وأيضا فهو غير معبر لأن الفروق فى التغير فى الربع السفلى ، والربع العلوى سوف لا تؤثر فى هذا المقياس . والانحراف الربيعى لا يمكن أن يستخدم فى تحليلات أبعد لهذه البيانات .

تمرين ٨ ـ ٧ ـ ٣ : اعتبر مرة أخرى البيانات التالية لدخول عمال ذوى كفاءة متوسطة خلال أسبوع فى سنة ١٩٧٧ .

عدد العمال	الدخول الأسبوعية
	£ £
5	20 وأقل من 30
26	30 وأقل من 40
41	40 وأقل من 50
58	50 وأقل من 60
48	60 وأقل من 70
18	70 وأقل من 80
4	80 وأقل من 90

احسب الانحراف الربيعى لهذه الفئة من البيانات .

(١) بالرسم مستخدما المضلع التكرارى المتجمع (أوجيف)

(٢) بحساب الربيع الأول والثالث .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٧)

وآخر مقياس للتغير هو معامل التغير . وهذا لا يقيس مباشرة التغير ، كما هو متبع بالنسبة للمقاييس التى درست مسبقاً فى هذا الفصل ، ولكن هو مقياس للتغير النسبى أى أنه يقيس التغير بالنسبة للحجم الحقيقى لقيم البيانات . ويعتمد معامل التغير على الوسط الحسابى والانحراف المعيارى ويحسب كما يلى :

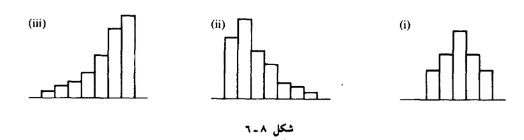
$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$$

وهو الانحراف المعيارى كنسبة مئوية للوسط الحسابى . ويوجد نوعان من المواقف حيث يكون استخدام معامل التغير مفيدا ، أولا إذا كان لدينا فئتان من البيانات حيث أن الأرقام لهما أحجام كلية مختلفة ونريد أن نعين مَنْ منهما « أكثر تغيرا » وعلى سبيل المثال فان انحرافا معياريا قدره £5 أسبوعيا لمتوسط دخل أسبوعى مقداره £150 يكون غير هام بينما انحراف معيارى قدره £5 أسبوعيا لمتوسط دخل أسبوعى مقداره £20 سيكون تغير خطيرا .

ثانيا : إذا أردنا أن نقارن التغيرات لفئات من بيانات مقاسة بوحدات مختلفة فإن معامل التغير لا يعتمد على الوحدات وذلك لأن الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لهما نفس الوحدات حيث أن الوحدات ستتلاشى عند ايجاد النسبة المئوية .

٨ ـ ٨ الألتواء

إعتبر المدرجات التكرارية الثلاثة الموضحة بالشكل ٨ ـ ٦ . الشكل *(i)* يمثل بيانات متماثلة والشكل *(ii)* به معظم القيم صغيرة وتوجد تكرارات صغيرة متتالية لحدوث قيم كبيرة وبيانات هذا النوع تعرف بأنها **موجبة الألتواء** . ومثل هذا التوزيع مرتبط عامة بالدخول ، وزمن الخدمة للموظفين فى مؤسسة ما . وفى شكل *(iii)* من الناحية الأخرى نجد أن معظم قيم البيانات كبيرة وتوجد تكرارات صغيرة متتالية لحدوث القيم الصغيرة . وبيانات هذا النوع تعرف بأنها **سالبة الألتواء** . ومثل هذا النظام يحدث إذا نظرنا الى توزيع أعمار المنتفعين بالمعينات السمعية .



شكل ٨ ـ ٦

ومقاييس معينة للألتواء يمكن أن تحسب من فئة البيانات التى تعتمد فى أحدى الحالات (**معامل بيرسون**) على القيم النسبية للوسط والوسيط وفى حالة أخرى (**معامل بولى**) على القيم النسبية للوسيط والربيعيات . ونلاحظ أنه بالنسبة للبيانات المتماثلة الموضحة بالشكل *(i)* فالوسط الحسابى والوسيط والمتوال تنطبق على بعض ، والربيع الأول والثالث متساوية البعد من القيمة المشتركة . ولمثل هذه البيانات فان مقاييس الألتواء تأخذ القيمة صفرا .

(أ) معامل بيرسون

عندما يكون لدينا بيانات ملتوية فالوسط الحسابى سوف يكون منحرفا الى نهاية المدرج التكرارى أكثر من الوسيط الذى بالتعريف يقسم مساحة المدرج التكرارى الى نصفين . وهذا موضح فى الشكل ٨ ـ ٧ .

وبالتالى فانه سوف يكون مناسبا أن نجعل مقياس الالتواء يعتمد على الفرق بين الوسط الحسابى ، والوسيط . وهذا بلا ريب سوف يكون موجبا فى حالة البيانات ذات الالتواء الموجب وسالبا فى حالة البيانات ذات الالتواء السالب .

ولكن ، مقدار هذا الفرق سوف يعتمد أيضا على مقدار انتشار البيانات . ولذا فانه من الضرورى أن نحاول أن نتخلص من تأثير هذا الأنتشار لكى نحصل على مقياس دقيق للألتواء . وهذا يتم بقسمة هذا الفرق على الأنحراف المعيارى . ولأسباب تاريخية فان الضرب فى العدد 3 سوف يستخدم أيضا ويكون لدينا .

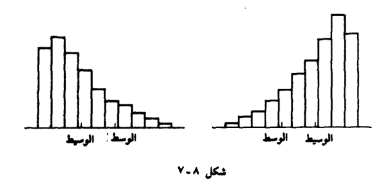
$$\text{معامل بيرسون للألتواء} = \frac{3 \times (\text{الوسط} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعيارى}}$$

مثال ٨ ـ ٨ ـ ١ بالنسبة لموظفى شركة ما ، أوجد معامل بيرسون اذا كان متوسط المدفوعات الأسبوعية الكلية هو £95.49 والوسيط للمدفوعات الأسبوعية الكلية هو £65.28 بينما الانحراف المعيارى للمدفوعات الأسبوعية الكلية هو £42.57 .

الاجابة معامل بيرسون للألتواء بالنسبة لهذه المدفوعات يحسب على الوجه التالى

$$\frac{3 \times (95.49 - 65.28)}{42.57} = \frac{3 \times 30.21}{42.57} = \frac{90.63}{42.57} = 2.13$$

وهذا يدل على أن الألتواء موجب ، ولكن لايوجد نص رياضى دقيق يمكن أن يؤسس على معامل بيرسون . ولكن يمكن أن نستعمله وصفيا فقط أو لكى نوجد نوعا ما من المقارنة بين الأشكال المختلفة .



شكل ٨ ـ ٧

تمرين ٨ ـ ٨ ـ ١ إحسب معامل الألتواء لتوزيع تكرارى له القيم التالية : الوسط الحسابى = 10 ، والوسيط = 11 ، والانحراف المعيارى = 5 . وما هو مدلول اجابتك بالنسبة لهذا التوزيع التكرارى ؟

(ب) معامل بوليى

نلاحظ من تعريف الوسيط والربيعيات ، أن مساحة المدرج التكرارى بين الربيع الأول والوسيط هى ربع المساحة الكلية . وبالمثل مساحة المدرج التكرارى بين الوسيط والربيع الثالث هى ربع المساحة الكلية (أنظر شكل ٨ ـ ٨) .

وبالنسبة للبيانات ذات الألتواء الموجب فالمستطيلات التى بين الوسيط و $Q3$ هى أقصر من المستطيلات بين $Q1$ والوسيط . ولأجل أن تحوى نفس المساحة ، فالمسافة بين $Q3$ والوسيط لابد أن تكون أكبر من المسافة بين $Q1$ والوسيط . والعكس سوف يكون فى حالة البيانات ذات الالتواء السالب .

وبالتالى فانه سوف يكون منطقيا أن الألتواء سوف يعتمد على

$$(Q3 - \tilde{x}) - (\tilde{x} - Q1)$$

وهذا المقدار سوف يكون موجبا فى حالة البيانات الموجبة الألتواء وسالبا فى حالة البيانات السالبة الألتواء . ولكى نلغى تأثير الانتشار فانه من الضرورى مرة أخرى أن نقسم على مقياس للتغير ، وأكثر مقياس مناسب فى هذا المجال هو الانحراف الربيعى وبالتالى نحصل على

$$\frac{(Q3-\bar{x})-(\bar{x}-Q1)}{QD}$$

أى أن

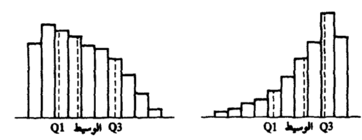
$$\text{معامل بولى} = \frac{Q1+Q3-2\bar{x}}{(Q3-Q1)/2}$$

مثال ٨ ـ ٨ ـ ٢ أوجد معامل بولى للألتواء بالنسبة لموظفى شركة معينة اذا كان الوسيط للمرتبات الأسبوعية هو £65.28 والربيع الأول هو £36.17 والربيع الثالث هو £124.52 .

الاجابة معامل بولى يساوى

$$\frac{36.17+124.52-2\times 65.28}{(124.52-36.17)/2}=\frac{160.69-130.56}{44.175}=0.68$$

نفس التعليقات العامة تطبق هنا كما فى حالة معامل بيرسون ، أى بمعنى آخر ، فان معامل بولى لا يمكن أن يستعمل كتحليل رياضى متقدم للبيانات ، ولكنه مقياس وصفى بحت .



شكل ٨ ـ ٨

تمرين ٨ ـ ٨ ـ ٢ البيانات التالية هى توزيع لدخول عمال متوسطى الكفاءة لمدة أسبوع فى سنة ١٩٧٧ :

عدد العمال	الدخول الأسبوعية £ £
5	20 وأقل من 30
26	30 وأقل من 40
41	40 وأقل من 50
58	50 وأقل من 60
48	60 وأقل من 70
18	70 وأقل من 80
4	80 وأقل من 90

احسب معامل بولى للألتواء لهذه الفئة من البيانات وفسر النتيجة .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٧)

تمارين :

٨ ـ ١ (أ) المطلوب :

ضع الوسط الحسابى ، والوسيط ، والمنوال بترتيب اهميتها كمتوسطات للتوزيعات التكرارية التالية ، وأشرح باختصار ترتيبك فى كل حالة .

(١) الدخول ، المأخوذة من احصائيات للأجور .

(٢) مقاسات أحذية السيدات معتمدة على بيانات المبيعات .

(٣) نسبة المنتجات المعيبة معتمدة على اختبار المجموعات .

(ب) يوضح الجدول التالى عدد الساعات لضوء الشمس المسجلة خلال شهر يوليو فى « بورن بول» خلال الفترة الزمنية ١٩٦٥ ـ ٧٣ .

عدد الأيام	عدد ساعات ضوء الشمس
1	0 وأقل من 1
2	1 وأقل من 2
4	2 وأقل من 3
11	3 وأقل من 4
24	4 وأقل من 5
35	5 وأقل من 6
43	6 وأقل من 7
49	7 وأقل من 8
54	8 وأقل من 9
31	9 وأقل من 10
15	10 وأقل من 11
10	11 وأقل من 12
279	

المطلوب : إحسب :

(١) متوسط عدد ساعات ضوء الشمس .

(٢) الوسيط لعدد ساعات ضوء الشمس .

(جـ م م الأساس ب ـ ديسمبر ١٩٧٥)

٨ ـ ٢ (أ) عرف الوسيط ، والوسط الحسابى ، والمنوال مع ذكر المزايا ، والعيوب الخاصة بكل منها .

(ب) (١) احسب الوسيط والوسط الحسابى والمنوال لما يلى :

عدد الموظفين	أجر المجاميع ، معدل الزيادة بالنسبة لعدد الساعات بالبنس
5	50 وأقل من 60
25	60 وأقل من 70
134	70 وأقل من 80
85	80 وأقل من 90
69	90 وأقل من 100
43	100 وأقل من 110
34	110 وأقل من 120

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٤)

(٢) وضح فائدة كل من الاحصائيات الثلاث المحسوبة .

٨ - ٣ (أ) مستخدماً الأرقام المعطاة فيما يلى احسب الآتى :

(١) المدى ؛
(٢) الوسط الحسابى ؛
(٣) الوسيط ؛
(٤) الربيع الأدنى ؛
(٥) الربيع الأعلى ؛
(٦) الانحراف الرُبيعى ؛
(٧) الانحراف المتوسط ؛
(٨) الانحراف المعيارى .

2	15	26	39	47	58
5	17	30	40	51	60
7	18	32	43	53	64
8	22	36	45	55	66
11					

(ب) اشرح المصطلح « مقياس التشتت » وأذكر بإختصار مزايا وعيوب استخدام المقاييس التالية للتشتت :

(١) المدى ؛
(٢) الانحراف الرُبيعى ؛
(٣) الانحراف المتوسط ؛
(٤) الانحراف المعيارى .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٨٠)

٨ - ٤ التوزيع التالى قد أخذ من تقدير أعد بواسطة قسم ضبط الانتاج لشركة صناعية :

عدد الدفعات	مرفوضات (وحدات للنتاج)
20	13 آلى 17 شامل
30	18 إلى 22 شامل
30	23 إلى 27 شامل
32	28 إلى 32 شامل
28	33 إلى 37 شامل
22	38 إلى 42 شامل
12	43 إلى 47 شامل
6	47 إلى 52 شامل

المطلوب منك هو الآتى :

(أ) احسب من خلال التوزيع المعطى السابق :

(١) الوسط الحسابى ؛
(٢) الانحراف المعيارى ؛

(ب) اشرح معنى الانحراف المعيارى بالنسبة للمثال السابق .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٦)

الفصل التاسع

تحليل الانحدار والارتباط

٩ ـ ١ الشكل الانتشارى

عند التفكير فى الانحدار والأرتباط فأننا نهتم بعلاقات بين المتغيرات . وهدفنا فى هذا الفصل هو علاقة عملية لتوضيح أهمية تطبيق هذه الوسائل للحصول بطريقة صحيحة على صيغة تتحقق بواسطتها هذه الأهداف عمليا .

إذا كان الموضوع ينظر إليه على هذا المستوى ، فالانحدار يمكن أن يعتبر كوسيلة لايجاد أفضل علاقة من نوع خاص بين المتغيرات المأخوذة فى الأعتبار من مجموعة بيانات والارتباط كوسيلة لقياس مقدار جودة هذه العلاقة لتلائم البيانات . وانشاء تعيين علاقات بهذه الطريقة مفيد ، وذلك لأنها تسمح لنا أن نتوقع فيما لأحد المتغيرات من معلومية بقية القيم .

البيانات التالية تعطى التكلفة لكل وحدة أنتاج (y) والناتج الكلى (x) لمصنع ما :

الناتج الكلى £	التكلفة لكل وحدة الانتاج £
10	20
18	14
25	12
20	14
16	15
30	9
32	9
34	8
9	28
24	11

(البيانات مأخوذة من م م ت أ ـ الجزء الرابع ـ مايو ١٩٧٤)

نحن نهتم هنا بالعلاقة الممكنة بين تكلفة كل وحدة من الناتج ، وعدد الوحدات الناتجة وبذلك يكون لدينا متغيران فقط (وهذه هى الحالة الوحيدة التى سوف نهتم بها) الخطوة الأولى للبحث عن علاقة هو أن نرسم رسما بيانيا مع أخذ المتغير x على المحور الأفقى ، والمتغير y على المحور الرأسى . ومثل هذا الرسم البيانى يعرف بالرسم البيانى المنتشر . والشكل الانتشارى للبيانات فى مثالنا فى الشكل موضح ٩ ـ ١ .

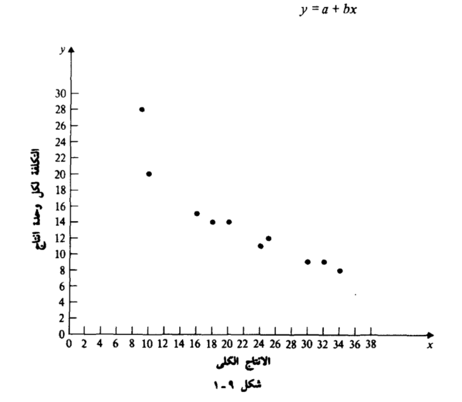
٩ ـ ٢ الانحدار الخطى

أيجاد أفضل علاقة بين x و y يؤدى الى إيجاد المنحنى من نوع محدد والذى يمر « بأقرب » ما يمكن لنقط البيانات ، ثم إيجاد المعادلة لهذا المنحنى . وطريقة الانحدار لا تدلنا على أفضل نوع للمنحنى ، ولكن لابد علينا أن نحدد هذا لأنفسنا لكى نبدأ الطريقة . فمن فحصنا للشكل الانتشارى نرى أن الخط المستقيم هو المنحنى المناسب للاستعمال . وفى الحقيقة الحالة الوحيدة التى سوف ندرسها هى الحالة التى يناسبها الخط المستقيم . أى ما سوف نبدأ به الآن يعرف بالانحدار الخطى .

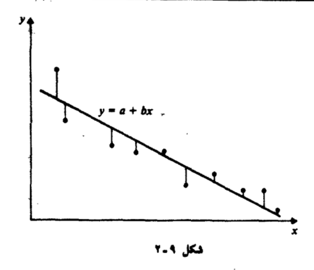
وبعد أن قررنا أننا سوف نستعمل الخط المستقيم فطريقة الانحدار يمكن أن نستعمل لايجاد أفضل خط مستقيم . وبالنسبة للمتغيرات لهذا المثال ، فإننا نبحث عن الكمية المنتجة التى تؤثر على سعر الوحدة الواحدة بدلا من العكس فنوع الشىء الذى نريد أن يكون استخدام خط الانحدار ، ولكى نتنبأ بتكلفة الوحدة الواحدة اذا صنعنا عددا معينا من الوحدات . وبالتالى تكون x هى المتغير المستقل و y هى المتغير التابع ، ونحن نبحث عن انحدار y على x . ومن المألوف أن نستخدم الرمز x و y بهذا الترتيب ولكنه ليس ضروريا وممكن أن نحسب انحدار x على y باستخدام نفس المبادىء ، ولكن بتبديل وضع x و y .

ولكى نرى كيف أن خط انحدار y على x معرف أنظر الى شكل ٩ ـ ٢ . فانه الخط بحيث تكون مجموع مربعات الانحرافات لنقط البيانات فى اتجاه y صغيرة على قدر الامكان . والمعادلة العامة لمثل هذا الخط هى (أنظر البند ٢ ـ ١)

$$y = a + bx$$



شكل ٩ ـ ١



شكل ٩-٢

حيث أن a و b ثوابت . ويجب أن نعين a و b التى تجعل مجموع مربعات الانحرافات فى اتجاه y أقل ما يمكن .

وبالنسبة لهذا المثال فإنه يعنى أننا لابد أن نجد a و b لتصغير

$$(a + b \times 10 - 20)^2 + (a + b \times 18 - 14)^2 + (a + b \times 25 - 12)^2 + (a + b \times 20 - 14)^2$$
$$+ (a + b \times 16 - 15)^2 + (a + b \times 30 - 9)^2 + (a + b \times 32 - 9)^2 + (a + b \times 34 - 8)^2$$
$$+ (a + b \times 9 - 28)^2 + (a + b \times 24 - 11)^2$$

وبصفة عامة نحتاج a و b لتصغير

$$\Sigma(a + bx - y)^2$$

حيث أن المجموع على جميع الازواج من قيم البيانات .

وعملية التصغير هى تمرين بسيط فى حساب التفاضل (أنظر الفصل الخامس) الذى يؤول الى المعادلتين التاليتين لكل من a و b

$$na + b\Sigma x = \Sigma y$$
$$a\Sigma x + b\Sigma x^2 = \Sigma xy$$

حيث أن n هى عدد أزواج قيم البيانات .

وتعرف هذه باسم المعادلات الأعتيادية ويمكن أن تُستخدم عمليا لايجاد a و b بالتعويض عن قيم n ، Σx ، Σy ، Σx^2 و Σxy ثم تحل . ومهما كان فإنه من المعتاد أكثر أن نوجد b من معادلة a وذلك بحذف a بين المعادلتين ثم نوجد a باعادة صيغة المعادلة الأولى . وبالتالى فأننا نحصل على :

$$b = \frac{\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)/n}{\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n}$$

$$a = \frac{\Sigma y - b\Sigma x}{n}$$

وبالنسبة للمثال السابق فانه فى هذه الحالة : $n=10$

$$\Sigma x = 10 + 18 + 25 + 20 + 16 + 30 + 32 + 34 + 9 + 24 = 218$$

$$\Sigma y = 20 + 14 + 12 + 14 + 15 + 9 + 9 + 8 + 28 + 11 = 140$$

$$\Sigma x^2 = 10^2 + 18^2 + 25^2 + 20^2 + 16^2 + 30^2 + 32^2 + 34^2 + 9^2 + 24^2 = 5442$$

$$\Sigma xy = 10 \times 20 + 18 \times 14 + 25 \times 12 + 20 \times 14 + 16 \times 15 + 30 \times 9 + 32 \times 9 + 34 \times 8 + 9 \times 28 + 24 \times 11 = 2618$$

وعلى هذا

$$b = \frac{2618 - 218 \times 140/10}{5442 - 218^2/10} = \frac{2618 - 3052}{5442 - 4752.4} = \frac{-43}{689.6} = -0.63$$

واشارة b السالبة تدل على خط مائل الى أسفل وذلك كان متوقعا من فحص الشكل الانتشارى .

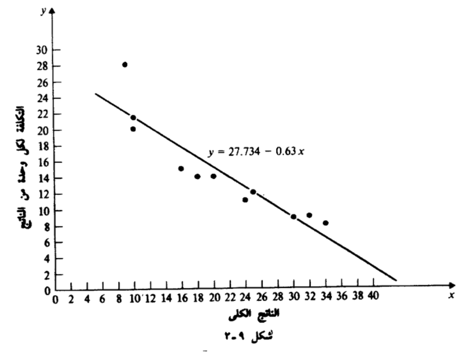
$$a = \frac{140 - (-0.63) \times 218}{10} = \frac{140 + 137.34}{10} = \frac{277.34}{10} = 27.734$$

فمعادلة خط انحدار y على x هى

$$y = 27.734 - 0.63x$$

وبسبب الطريقة التى عرف بها الخط الذى أوجدنا معادلته فانه يسمى بخط انحدار المربعات الصغرى . وهذه المعادلة هى أفضل علاقة مطلوبة من النوع الخطى بين المتغير المستقل x والمتغير التابع y .

وخط الانحدار يمكن أن يرسم على الشكل الانتشارى بإختيار أى قيمتين ملائمتين للمتغير x ، وحساب قيم y المناظرة ، ورسم النقطتين الناتجتين والوصل بينهما مع مد الخط . وهذا قد تم فى مثالنا ـ كما فى شكل ٩ ـ ٣ باستخدام $x=10$ و $x=30$ كقيمتين مختارتين للمتغير x . وسوف نتفق بفحص الشكل ٩ ـ ٣ بأنه مناسب وهو بالنسبة الينا الخط



شكل ٩ـ٣

الذى ينتج عن طريقة المربعات الصغرى . والشىء الذى يراد أن نحصل عليه إذا طلب أن نوفق الخط مع النقط بالعين المجردة ، وذلك بتحريك مسطرة ، ورسم الخط الذى ندرك أنه مناسب بطريقة بديهية . وفوائد استخدام طريقة المربعات الصغرى هى أنها موضوعية (كل شخص معطى نفس مجموعة البيانات سوف يحصل على نفس الخط) وقيم a و b التى تم الحصول عليها بهذه الطريقة لها خواص إحصائية مرغوب فيها ويساعدنا استخدام الخط فى التنبؤات .

تمرين ٩ ـ ٢ ـ ١

(أ) استعمل طريقة المربعات الصغرى لايجاد معادلة أفضل خط مستقيم يوافق البيانات التالية . المتغير المستقل هو x .

x	11	13	14	17	18	21	26
y	20	23	25	28	30	34	38

كل الحسابات لابد أن توضح .

(ب) ارسم شكل البيانات المشتقة ، وأرسم الخط الانحدارى للمربعات الصغرى على الشكل الانتشارى

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٨)

تمرين ٩ ـ ٢ ـ ٢ تشير البيانات التالية الى الزمن اللازم لاجراء عملية ما وتكلفتها .
أوجد خط الانحدار للمربعات الصغرى للتكلفة على الزمن ، ووضح بيانيا مقدار تآلف البيانات مع الخط . وضح على رسمك البيانى القيمة العظمى للخطأ الناتج عن استخدامنا خط الانحدار فى تقدير التكلفة لهذه العمليات .

تكلفة (£)	الزمن (بالدقائق)
7	4
4	4
7	5
9	6
10	7
14	8
18	10
18	12

(حـ م م ـ الأساس ب ـ يونيو ١٩٧٩)

٩ ـ ٣ التنبؤ

بعد أن وجدنا انحدار y على x يمكننا أن نستخدمه للتنبؤ عن قيم y مقابل قيم x المعطاه . (لا حظ أن هذه المعادلة لا تستعمل للتنبؤ عن قيمة x مقابل y المعطاه) وإذا كان هذا النوع من التنبؤ هو المطلوب فان انحدار x على y يجب أن يحسب ويستعمل . والتنبؤ يمكن أن يتم بيانيا عن طريق قراءة قيم y المناظرة من الرسم البيانى أو عن طريق التعويض بقيمة y المعطاه فى معادلة الانحدار وحساب قيمة y .

وبالنسبة للمثال المعطى فى البند ٩ ـ ١ نجد أن فى البند ٩ ـ ٢ انحدار y على x هو

$$y = 27.734 - 0.63x$$

وبفرض أننا نريد معرفة سعر الوحدة الواحدة المتوقع إذا قررنا أن نصنع 22 وحدة . فمن المعادلة قيمة y المتنبأ بها هى

$$y = 27.734 - 0.63 \times 22 = 27.734 - 13.86 = 13.874$$

أى بمعنى آخر : إن السعر المتوقع لكل وحدة هو 13.87 جنيها (£) .

(هذه هى قيمة y التى حصل عليها من القراءه عند $x=40$ بالشكل ٩ ـ ٣) . بعد هذا افترض أننا نريد أن نعرف سعر كل وحدة المتوقع إذا قررنا صنع 40 وحدة . فمن المعادلة تكون قيمة y المتوقعة هى

$$y = 27.734 - 0.63 \times 40 = 27.734 - 25.2 = 2.534$$

أى بمعنى آخر السعر المتوقع لكل وحدة هو £2.53 . (هذه هى قيمة y الناتجة من القراءة عند $x=40$ بالشكل ٩ ـ ٣) .

وبالرغم من أن المثالين السابقين متماثلان فى الحسابات ولكنه يوجد فارق كبير بينهما ففى الحالة الأولى قيمة y تم التنبؤ عنها مقابل قيمة x فى نطاق قيم x فى البيانات الأصلية . وهذه العملية تعرف **بالاستكمال الداخلى** . فى الحقيقة قيم x الخاصة التى استعملت كانت تساوى تقريبا متوسط قيم x فى البيانات الأصلية ، فإنه من المناسب جدا إذا كانت 22 وحدة قد انتجت فمتوسط سعر الوحدة الواحدة يكون حوالى 14(£) جنيها . وبصورة أعم نستطيع القول بأن الاستكمال الداخلى هو طريقة أكثر فاعلية والتى سوف تؤدى الى تنبؤات دقيقة . وإذا كانت هناك توزيعات مناسبة بخصوص البيانات فاننا نستطيع أن نتابع لايجاد حدود الثقة لتقدير معاملات الانحدار a و b والتنبؤ من الأنحدار بأن الحدود على توقعات الاستكمال الداخلى سوف تكون ضيقة .

وكلما كانت قيمة x المستعملة قريبة من قيم التنبؤ لمتوسط قيم x من البيانات الأصلية ، كلما كانت حدود الثقة للتنبؤ أضيق ما يمكن .

وفى الحالة الثانية قيمة y قد تم التنبؤ عنها مقابل قيمة x خارج نطاق قيم x فى البيانات الأصلية . وهذه العملية تعرف **بالاستكمال الخارجى** فالاستكمال الخارجى هو عملية أقل فاعلية عن الاستكمال الداخلى . فالقيمة £2.53 لكل وحدة (التى تم الحصول عليها من مثالنا السابق) تكون غير مقنعة ، وذلك لأنها ليس لها معنى محتمل فى استمرار زيادة الناتج الكلى لهبوط تكلفة الوحدة نسبيا . ففى الحقيقة اذا كنا تنبأنا بهذه الطريقة للقيمة $x=46$ مثلا ، فإننا سوف نحصل على النتيجة التى ليس لها معنى ، وهى تكلفة سالبة للوحدة الواحدة . والملاحظ هو أن علاقة الانحدار وجدت بطريقة المربعات الصغرى فى نطاق قيم المتغير المستقل للبيانات المستخدمة ، فليس من الضرورى أن العلاقة تكون صحيحة على الاطلاق لقيم المتغير المستقل خارج هذا النطاق ، وبالتأكيد فى مثالنا هذا أنه من الواضح أن هذه العلاقة تفشل اذا أخذنا قيما للمتغير x بعيدة جداً عن نطاق القيم الأصلية . وزد على ذلك أنه اذا كانت علاقة الانحدار تعنى شيئا خارج عن نطاق القيم الأصلية ، فحساب فترات الثقة للتنبؤ ينتج عنه فترات واسعة واضحة كما أنه يوجد التباس ملحوظ بالنسبة للقيم المتنبأ بها . وبالرغم من هذه المخاطرات المتعلقة بالاستكمال الخارجى فهو شيء لابد أن يجرى فى بعض الحالات ويلاحظ أنه فى حالة التنبؤ بالقيم المستقبلة باستخدام علاقة الانحدار حيث الزمن متغير مستقل . فالمهم فى هذه الحالة هو أن نضع فى الذهن الخطورة الموجودة وأيضا لا نحاول التنبؤ للمستقبل البعيد .

تمرين ٩-٣-١ المبيعات الكلية للكهرباء فى بريطانيا العظمى خلال السنين 1964 — 1974 معطاه كما يلى

السنة	المبيعات الكلية (ألف مليون وات ساعة)
1964	140 374
1965	151 071
1966	156 931
1967	161 664
1968	173 925
1969	185 423
1970	193 907
1971	199 442
1972	206 370
1973	220 591
1974	213 888

(أ) أوجد المعادلة لخط المربعات الصغرى لتوفيق البيانات .

(ب) واعتمادا على البيانات المعطاة والمعادلة الناتجة من (أ) أوجد تقدير المبيعات للكهرباء فى سنة 1977 وعلق على هذا التقدير .

(م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٧)

(هذا التمرين يوضح استعمالا شائعا لانحدار المربعات الصغرى الذى سوف نتعرض له مرة أخرى عندما ندرس السلاسل الزمنية فى الفصل العاشر . ولكى يأخذ متغير الزمن x قيم سهلة الاستخدام فانه من الضرورى أن نعرف زمنا مناسبا بأنه الزمن الصفرى . ثم ، بالنسبة لمثل هذه البيانات السنوية أستعمل السنة الواحدة كوحدة الزمن . وبالتالى اذا كانت سنة 1964 هى المختارة كصفر زمنى ، فقيم x ستكون 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 بينما اذا كانت سنة 1969 مثلا ، اختيرت كصفر زمنى فقيم x فى هذه الحالة ستكون 5 − ، 4 − ، 3 − ، 2 − ، 1 − ، 0 ، 1، 2 ، 3 ، 4 ، 5)

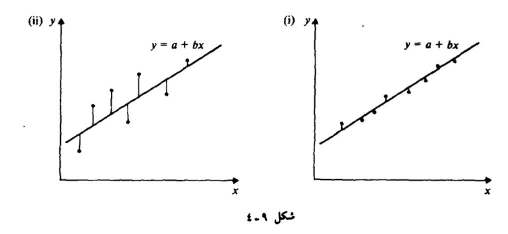
٩ - ٤ الأرتباط

كما هو مذكور فى البند ٩ - ١ الارتباط يمكن أن يعتبر وسيلة لقياس كيفية موافقة علاقة من نوع معين لفئة البيانات لصورة أفضل . وبملاحظة ما فعلنا بالعلاقة المثلى المعرفة على أنها التى تُصغر مجموع مربعات الانحرافات فى اتجاه y ونرى كيف أن جودة أفضل علاقة ستعتمد على مقدار صغر مجموع المربعات عند تصغيرها .

اعتبر الشكل ٩ - ٤ . فخطى الانحدار الموضحين لهما نفس المعادلة ، ولكن مجموع مربعات الانحرافات فى اتجاه y لنقط البيانات حول الخط فى الشكل (i) (حيث أن التوفيق يكون جيد) ويكون أصغر بكثير من مجموع مربعات الانحرافات فى اتجاه y لنقط البيانات حول الخط فى الشكل (ii) حيث أن التوفيق أضعف . ومعامل الأرتباط "r" يعتمد على مجموع المربعات للانحرافات فى اتجاه y عن أفضل خط . معبراً عنه كنسبة للانحراف الكلى فى قيم y مقاسة كمجموع المربعات حول الوسط الحسابى ، أى بمعنى آخر معامل الارتباط يعتمد على :

$$\frac{\Sigma(a+bx-y)^2}{\Sigma(y-\bar{y})^2}$$

حيث أن a و b توجد باستخدام معادلة المربعات الصغرى فى البند ٩ ـ ٢ . واذا كان التوفيق جيدا نجد أن هذه النسبة قريبة من الصفر لأن المقام سوف يكون صغيرا . واذا كان التوفيق ضعيفا ، فالنسبة تكون قريبة من الواحد وذلك لأنه سيوجد انحراف حول أفضل خط مستقيم مساو تقريبا كما هو حول الخط المتوسط $y=\bar{y}$. ولاحظ أن هذه النسبة لا يمكن أن تزيد عن واحد ، وذلك لأنه اذا كان مجموع المربعات حول $y=\bar{y}$ أقل من مجموع المربعات حول $y=a+bx$ فان المعادلة $y=a+bx$ لايمكن أن تمثل أفضل خط مستقيم وعلى ذلك $y=\bar{y}$ يكون أفضل .



شكل ٩ ـ ٤

معامل الارتباط r معرف بالصورة .

$$r^2 = 1 - \frac{(a + bx - y)^2}{(y - \bar{y})^2}$$

وفى ضوء المناقشة السابقة نرى أنه لتوفيق جيد ، حيث تكون النسبة صغيرة فان r^2 تكون قريبة من 1 بينما للتوفيق الضعيف ، حيث أن النسبة تقترب من 1 فان r^2 سوف تكون قريبة من الصفر .

المقدار r^2 يعرف بمعامل التحديد .

وبالتعويض فى تعريف r^2 بصورة a و b من انحدار المربعات الصغرى ، والقيام ببعض الحسابات ، فاننا نبرز الصورة العامة المستخدمة لحساب معامل الأرتباط ، والتى هى :

$$r = \frac{\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)/n}{\sqrt{[\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n]\,[\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2/n]}}$$

اذا كان التوفيق جيدا وميل خط الانحدار الى أعلى ، فإن r تكون قريبة من $+1$

اما اذا كان التوفيق جيدا وميل خط الانحدار الى اسفل ، فان r تكون قريبة من -1

اذا كان التوفيق ضعيفا ، فإن r تكون قريبة من الصفر .

هذه النتائج منسقة بالنسبة للنقط المذكورة سابقا بخصوص r^2 وموضحة فى (i) ، (ii) و (iii) على التوالى فى شكل ٩ ـ ٥ .

وعلى سبيل المثال لحساب معامل الأرتباط اعتبر البيانات المعطاة فى البند ٩ ـ ١ . رأينا فى البند ٩ ـ ٢ ، أن $n=10$ ، $\Sigma x=218$ ، $\Sigma y=140$ ، $\Sigma x^2=5442$ ، $\Sigma xy=2618$ بالاضافة الى هذا نحتاج الى

$$\Sigma y^2 = 20^2 + 14^2 + 12^2 + \ldots + 11^2 = 2292$$

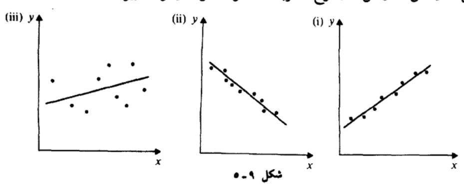
وبالتالى

$$r = \frac{2618 - 218 \times 140/10}{\sqrt{(5442 - 218^2/10)(2292 - 140^2/10)}} = \frac{-434}{\sqrt{689.7 \times 332}} = -0.907$$

وهذه القيمة قريبة من 1 — وتدل على توفيق جيد لخط مائل الى أسفل $y=27.734 - 0.63x$ لنقط البيانات (مسألة الأختبار الاحصائى للقيمة ما إذا كانت قريبة من 1+ أو 1- تؤجل للفصل السادس عشر) .

وبعد أن حسبنا معامل الأرتباط وقررنا ما إذا كانت قريبة من 1- أو 1+ أو من الصفر تبقى مرحلة أخرى للاستكمال الداخلى . فاذا كانت r قريبة من الصفر هل ينتج أنه لا يوجد علاقة على الاطلاق بين المتغيرين ، أى بمعنى آخر هل هما غير معتمدين على بعض ؟

وإذا فرض توزيع معين (أى أن أزواج الملاحظات تتبع التوزيع الطبيعى الثنائى) فتكون هذه النتيجة صحيحة . وعلى أى الأحوال اذا أخذنا أى مجموعة أصلية من أزواج القيم وحسبنا معامل الأرتباط ، فنتيجة استقلال المتغيرات ليست بالضرورة تتحقق . وذلك لأن ما يقيسه معامل الأرتباط هو مقدار توفيق أفضل خط مستقيم ممكن للبيانات . وحقيقة كون r يقترب من الصفر (أى أنه لا يوجد خط مستقيم مناسب جدا) فان ذلك لايتحكم فى امكانية وجود علاقة من نوع آخر مناسبة جدا ، وبالتالى فان المتغيرات لاتكون مستقلة . وهناك امكانية موضحة فى الشكل ٩ ـ ٦ حيث أنه لايوجد خط مستقيم له مجموع صغير لمربعات الانحرافات فى اتجاه y ولكن القطع المكافىء يوافق البيانات جيدا . والخط المستقيم الموضح هو أفضل ما يمكن ، ولكن مجموع المربعات حوله سوف يكون كبيرا .



شكل ٩ ـ ٥

ومن ناحية أخرى افترض أن r وجدت قريبة من 1+ أو من 1- . فهل ينتج من هذا أن التغيرات فى المتغير المستقل x مسئولة عن المتغيرات فى المتغير التابع y أى أنه هل يوجد سببية ما ؟

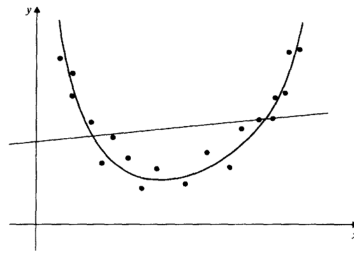
والاجابة على هذا أنه لا نحتاج لهذا الربط ولا نتعرض له فان الرابطة لا تكون الحاجة اليها (أولا تكون الحاجة اليها كلية) سببية ، وامتداد السببية تكون باختيار كل حالة على حدة . ففى المثال الذى كان يدرس فانه يبدو معقولا أن التغيرات فى أرقام المفردات للعناصر المنتجة هى المسئولة عن التغيرات فى تكلفة الوحدة . ومع ذلك افترض أنه كان يجب أن نحسب معامل الارتباط مستخدمين البيانات المعطاه على اسعار الطعام ، وأسعار البترول . والارتباط هنا يمكن أن يكون قريبا من 1 وحيث أن أسعار البترول تؤثر فى أسعار الطعام الى حد ما خلال تكلفة النقل ، والجزء الأساسى من العلاقة سوف لا يكون سببيا ولكنه سوف يعكس تضخما عاما فى مجموعة الأسعار .

تمرين ٩ ـ ٤ ـ ١ الأرقام التالية مأخوذة من اتجاهات اقتصادية توضح أرقام الفهرس السنوى لتسجيل سيارات جديده وأرقام لشراء سندات جديدة خلال الفترة الزمنية من ١٩٦٥ الى ١٩٧٤ .

	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
مسجلات سيارات جديدة (x)	93.5	88.1	93.1	93.1	82.3	91.4	108.5	138.6	137.1	102.8
شراء سندات (y)	1590	1450	1556	1643	1587	1775	2053	2447	2871	2517

إحسب معامل الأرتباط بين x و y وهل اجابتك دلت على علاقة سببية ؟

(لاحظ أن حساب معامل الأرتباط يمكن أن يكون سهلا وباستخدام المصطلحات الواردة فى الفصل الثامن للمتوسط والانحراف المعيارى



شكل ٩-٦

خذ

$$x' = \frac{x - p_1}{q_1}, \quad y' = \frac{y - p_2}{q_2}$$

لأى من p_1 ، q_1 ، p_2 ، q_2 واحسب الارتباط بين x' و y' وهكذا هو r المطلوب) .

٩ ـ ٥ أرتباط الرتب

فى بعض الأحيان نحتاج الى قياس قوة العلاقة الخطية بين المتغيرات باستخدام البيانات التى يمكن أن نثق بها الى حد رتبة ترتيبها . أى بمعنى آخر أنه اذا كانت قيمة احدى البيانات هى (مثلا) أكبر من أخرى فأنه الحقيقة يمكن أن تصدق ، ولكنه لا يمكن الاستفادة من بين الفرق فى قيمتى العنصرين . وهذه الحالة يمكن أن تظهر عن عدم الدقة فى القياسات ولكن الأكثر شيوعا فانها نتيجة لطبيعة المتغيرات المستخدمة . وذلك يحدث بصفة عامة فى حالة التسويق حيث أن موضوع المسح الاحصائى يكون معطى (مثلا) خمسة أنواع من الحلوى ومطلوب ترتيبها طبقا للأولوية . ففى الحالة السابقة تكون البيانات الناتجة فى شكل ترتيبى ، ولكن فى الحالة الأخيرة أيضا البيانات يمكن أن تصدق الى حد تنظيم الرتب . فالفرق بين قبول حلوى حدد لها 8 درجات وحلوى حدد لها 6 درجات لايمكن ان يكون لها معنى مقبولا مثل الفرق بين حلوى حدد لها 5 درجات وحلوى حدد لها 3 درجات .

واذا كان لدينا بيانات من هذا النوع فقوة الارتباط الخطى يمكن أن تقاس عن طريق ـ إذا لزم ـ تحويل فئة الأشكال

الى فئتين من الرتب وبعد هذا ـ فى الأساس ـ نحسب معامل الارتباط العادى باستخدام الرتب . والمعامل الناتج بهذه الطريقة يعرف بمعامل سبيرمان لارتباط الرتب ويرمز له عموما بالحرف اليونانى ρ (رو) ولنعتبر المثال التالى :

شركة لحماية المستهلك القومى فحصت سبع ماركات من البوية لتحديد نوعيتها بالنسبة للسعر . ونتائج الشركة رتبت كما يلى :

ماركة	السعر لكل متر £	نوع الرتبة
T	1.92	2
U	1.58	6
V	1.35	7
W	1.60	4
X	2.05	3
Y	1.39	5
Z	1.77	1

(البيانات مأخوذة من م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٦٧)

باستخدام معامل سبيرمان للرتب أوجد ما إذا كان المستهلك عموما حصل على قيمة مادية .

الأرقام النوعية ما هى الا رتب . ولكى نحسب معامل سبيرمان لابد أولا أن نحول الأسعار الى رتب . وسوف نفعل هذا باعطاء أكثر ماركة مكلفة الرتبة 1 ورتبة 2 للماركة التى تليها وهكذا .

وهذا يؤدى الى الترتيبات التالية :

ماركة	T	U	V	W	X	Y	Z
سعر الرتبة	2	5	7	4	1	6	3
نوع الرتبة	2	6	7	4	3	5	1

وإذا كان معامل الارتباط حسب باستخدام هذه الرتب ، فالقيمة الناتجة ستكون مادية 0.82 . والقارىء يمكن أن يتأكد من هذه النتيجة .

وحيث أن ، هذه ليست الطريقة المعتادة لحساب معامل ارتباط الرتبة . وذلك أن قيم x هى الأعداد من 1 الى n فى ترتيب ما (عموما تكون مختلفة) والمعادلة لمعامل الارتباط ρ يمكن أن تبسط بمعالجات جبرية الى الشكل التالى :

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث أن الرمز d يدل على الفرق بين كل زوجين متناظرين من الرتب . وهذه هى الصيغة المستعملة لحساب معامل سبيرمان .

وبالرجوع الى المثال السابق نكتب :

ماركة	T	U	V	W	X	Y	Z
$d = x - y$	0	−1	0	0	−2	1	2
d^2	0	1	0	0	4	1	4

$$\Sigma d^2 = 0 + 1 + 0 + 0 + 4 + 1 + 4 = 10$$

اذا

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 10}{7 \times 48} = 1 - \frac{5}{28} = 0.8$$

بما أن معامل سبيرمان يحسب على نفس القواعد مثل معامل الارتباط العادى بمجرد معالجة البيانات بطريقة مناسبة بالضبط لنفس النقط المستعملة لدراستها ، كما استعملت فى معامل الارتباط العادى . وبالأخص فى هذا المثال عندنا قيمة معامل الارتباط قريبة من (1+)موضحة ارتباطا خطيا قويا الى أعلى بين رتبة السعر ورتبة النوع ، وهذا فى الحقيقة لا يدل على أن المستهلك عموما قد حصل على قيمة مقابل ما دفعه من نقود .

وفى المثال السابق عندما رتبت الأسعار لكل ماركة أخذت رتب مختلفة ، وذلك لأن كل الأسعار كانت مختلفة وهذا لا يحدث اذا كانت (مثلا) الماركة U التى سعرها 2 بنس لكل لتر أكثر تكلفة ، أو الماركة Y التى سعرها 4 بنس لكل لتر أقل تكلفة . ففى هذه الحالات لابد أن نجد ارتباطا بين الرتب . والوسيلة المستخدمة هى اذا كان يوجد ارتباط ، فإنه يعطى كل قيمة من القيم المرتبطة متوسط الرتب التى كان سوف يأخذها ، اذا كانت مختلفة وبعد ذلك نستمر كالمعتاد لحساب الفروق $d's$ وبالتالى ρ .

مثال ٩ ـ ٥ ـ ١ شركة تهتم بوضع طريقة لاختيار المتقدمين لمراكز وظيفية بدلا من طريقة المواجهة . وللمساعدة فى البحث عن قرار للاختيار فان ثمانية من المتقدمين سوف يتعرضون الى الطريقتين وكانت النتائج التى تم الحصول عليها كما يلى :

المتقدم	A	B	C	D	E	F	G	H
الرتبة فى الامتحان	1	2	3	4=	4=	6	7	8
الرتبة فى المواجهة	2	1	3	4	5	6	7	8

احسب معامل سيبرمان لربط الرتب بين نتائج الطريقتين ، وعلق على الاجابة .

الاجابة اذا كانت D و E منفصلتين فيجب أن تكون لهم الرتب 4 و 5 فى طريقة الاختبار ، ولكن فى هذه الحالة لابد أن كليهما يأخذ الرتبة 4.5=2 / (4+5) وبالتالى حساب معامل سبيرمان هو كما يلى :

المتقدم	A	B	C	D	E	F	G	H
رتبة الامتحان	1	2	3	4.5	4.5	6	7	8
رتبة المواجهة	2	1	3	4	5	6	7	8
d	−1	1	0	0.5	0.5	0	0	0
d^2	1	1	0	0.25	0.25	0	0	0

$$d^2 = 2.5$$

وبالتالى :

$$\rho = 1 - \frac{6d^2}{n(n-1)} = 1 - \frac{6 \times 2.5}{8 \times 63} = 0.97$$

وهذه القيمة قريبة جدا من 1 ، موضحة رابطة خطية قوية بين نتائج الطريقتين ، ويتضح أن تغير استعمال طريقة الاختبار سوف لا تؤدى الى انحراف معنوى عن الاختيارات التى كانت سوف تنتج عن استخدام طريقة المواجهة .

تمرين ٩ ـ ٥ ـ ١ البيانات التالية توضح ترتيب 10 مصانع منتجة للبوكسايت فى ترتيب تنازلى للشعور بالأمان ، مع عدد الحوادث لكل ألف موظف على مدى السنوات الأخيرة .

المصنع	رتبة الشعور بالأمان	عدد الحوادث لكل 1000 موظف
A	1	1.2
B	2	5.3
C	3	8.3
D	4	13.1
E	5	18.2
F	6	15.9
G	7	10.4
H	8	3.3
I	9	23.2
J	10	19.7

المطلوب :

(١) توضع البيانات فى شكل بيانى علق على ما اذا كانت حدوث حادثة مرتبطا بالشعور بالأمان .
(٢) احسب معامل سبيرمان للرتب وفسر النتيجة .
(٣) افترض الآن أنه معروف أن المصنع *H* ليس بالتحديد أكثر حداثة من المصانع الأخرى فبدون اجراء الحسابات اشرح ما هى التعديلات التى يمكن أن تتم فى (٢) ، السابقة وبأى طريقة سوف تتأثر النتيجة .

(ج م م ـ الأساس ب ـ ديسمبر ١٩٧٥)

تمارين

٩ ـ ١ البيانات التالية قد تم جمعها خلال ثمانى فترات

الفترة	وحدات الانتاج	التكلفة الكلية £
1	10 000	32 000
2	20 000	39 000
3	40 000	58 000
4	25 000	44 000
5	30 000	52 000
6	40 000	61 000
7	50 000	70 000
8	45 000	64 000

ارسم الشكل الانتشارى ، وبطريقة المربعات الصغرى ارسم احسن خط مستقيم يوافق البيانات .

أوجد معادلة الخط ، وقدر السعر المتوقع فى مستويات الانتاج 26 000 وحدة و 47 750 وحدة .

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٣)

٩ ـ ٢ الزمن اللازم لانتاج مجموعات من عنصر ما ، وجد أنه مرتبطا بعدد العناصر فى كل مجموعة . والسجلات توضح أن زمن الانتاج لست مجموعات هى كما يلى :

زمن الانتاج (بالساعة)	حجم المجموعة
4.0	50
5.8	90
6.8	150
7.6	250
7.6	280
8.6	350

وقد اقترح بديلان لتقدير الانتاج t من حجم المجموعة r .

(i) $t = 3.5 + r/50$

(ii) $t = 2 + \sqrt{r/8}$

(١) لكل من العلاقتين أوجد قيم t المناظرة الى r=72,128,200,288

(٢) استخدم القيم الناتجة من الجزء (١) لرسم شكل بيانى يوضح العلاقتين البديلتين . ومن ملاحظة رسمك البيانى أذكر أيهما يمثل أفضل البيانات فى الجدول المعطى .

(٣) أوجد أفضل منحنى على الصورة $t = a + b\sqrt{r}$ يوافق البيانات مستخدما انحدار المربعات الصغرى للمتغير t على $\sqrt{r}$

(حـ م م الأساس ب ـ يونيو ١٩٧٧)

٩ ـ ٣ (أ) اشرح الغرض من حساب معامل الأرتباط ، وأعط المدى الممكن للقيم التى يمكن أن يأخذها .

(ب) افترض أنه وجد باستخدام اختبار احصائى ما ، أن مقدار معامل ارتباط محسوب هو 0.6+ بين متغيرين ، وأنه لا يختلف معنويا عن 0 . ما معنى هذا ؟

(جـ) الجدول التالى يعطى الناتج الشهرى x وتكلفة العمالة y لمصنع ما .

تكلفة العمالة ($£ \times 10^3$)	الناتج الشهرى (tons $\times 10^3$)
50	66
53	74
59	78
52	70
64	81
85	90
77	87
68	85

المطلوب :

احسب معامل الارتباط وعلق على نتيجتك . كيف تتأثر اجابتك اذا كان الناتج قد قيس بـ tonne بدلاً من ton حيث أن 1 ton=1.016 tonne ؟

(حـ م م ـ الأساس ب ـ يونيو١٩٧٨)

٩ ـ ٤ عشر محطات بترول A — J تقع فى مناطق لها نفس كثافة المرور ورتبت أولا حسب نوعية الخدمة ، ثانيا حسب

حجم المساحة الأمامية ، وثالثا حسب سعر البترول المباع . الرتبة 1 تدل على خدمة ممتازة وأكبر مساحة أمامية ، وأقل سعر . والناتج بما فيها معدل البيع الأسبوعى للبترول معطاه فى الجدول التالى

المحطة	نوع الخدمة	حجم المساحة الأمامية	سعر البترول	مبيعات (بمئات الجالونات)
A	3	8	2	47
B	7	4	9	20
C	4	10	8	23
D	8	2	1	36
E	2	1	4	36
F	5	3	5	31
G	10	9	7	33
H	9	6	10	28
I	1	4	3	42
J	6	7	6	24

المطلوب :

(١) اجر بعض الحسابات لمعرفة ما اذا كان سعر البترول أو نوعية الخدمة محتملا أن تكون عاملا مهما فى ايجاد حجم البترول المباع ، أولا يظهر أنه عامل مهم .

(٢) هل يوجد أى دليل على أن نقترح بأن تلك المحطات ذات المساحة الأمامية الكبيرة تعطى خدمة أفضل ؟

(٣) لأى سبب تظن أن التحليل السابق قد احتوى على محطات لها كثافة مرور متشابهة ؟

(حـ م م ـ الأساس ب ـ ديسمبر ١٩٧٧)

الفصل العاشر

السلاسل الزمنية

١٠ ـ ١ السلاسل الزمنية ومكوناتها

كما ذكرنا فى الفصل السابع ، فان السلسلة الزمنية عبارة عن مجموعة من القيم لمتغير ما واردة حسب ترتيب وقوعها فى لحظات زمنية . وفى العادة ، فإن اللحظات الزمنية تكون على فترات متساوية ، وهذا هو النوع الذى سندرسه هنا . ومن الأمثلة المعروفة للسلاسل الزمنية الأرقام الشهرية للتجارة ، وأرقام البطالة الشهرية ، والأرباح السنوية لشركة ما .

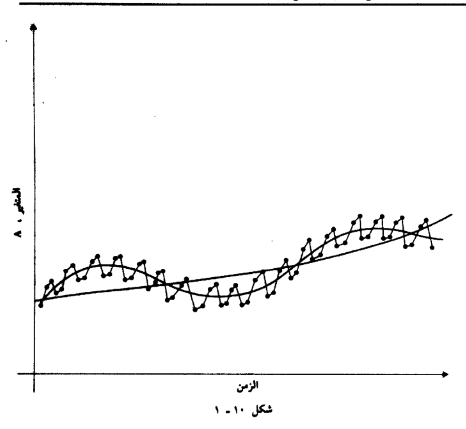
وقد رأينا فى الفصل السابع كيف يمكن تمثيل سلسلة زمنية على رسم بيانى بسيط بتوقيع الزمن على المحور الأفقى ، والمتغير الذى يهمنا على المحور الرأسى ثم توصيل النقط الناتجة ويبين شكل (١٠ ـ ١) رسما بيانيا عاما من هذا النوع يمثل بيانات تصدر كل ثلاثة أشهر مرسومة لعدة أعوام . والغرض من هذا الرسم توضيح الأنواع المختلفة من التغيير التى يمكن أن توجد فى السلاسل الزمنية .

ويبين الخط المستقيم تقريبا الذى يمر عند وسط الرسم البيانى الاتجاه العام لحركة قيم المتغير مع الزمن ، وفى المثال المعطى هناك اتجاه عام للصعود ويمكن تسمية هذا النوع من التغيير « بالاتجاه » (وأحيانا يسمى « بالاتجاه فى الأمد البعيد ») ويحتفظ « الاتجاه » بثبات خطة العام لمدة طويلة .

أما الخط المنحنى الذى يصعد ويهبط فى هدوء حول خط الاتجاه فيمثل « التغير الدورى » فى السلسلة الزمنية . وهذا التغير يحدث دوريا فى قيم المتغير ، ويمكن تقدير فترة الدورة بعدة سنوات . كما أن مدى التغير الدورى قد يختلف من مكان لآخر فى السلسلة الزمنية . وهذا النوع من التغير هو الذى نصادفه فى دورات الاقتصاد التى يتناوب فيها الانتعاش والكساد .

أما التغير الذى تمثله الخطوط التى تصل النقط الموقعة فهو « التغير الموسمى » فى السلسلة الزمنية ، أى التغير من أحد فصول السنة الى الآخر . وفى العادة ، فان التغير الموسمى منتظم فى فترته وفى مداه ، وسنرى فيما بعد كيف يمكن الاستفادة من هذا الانتظام لتحليل هذا التغير . وفى المثال المعطى لدينا قيم أعلى فى الربعين الثانى والثالث من السنة ($Q2$ و $Q3$) مما يوجد فى الربعين الأول والرابع ($Q1$ و $Q4$) وهكذا فإن الرسم البيانى المعطى يمكن أن يمثل مبيعات الأيس كريم ، أو احصائيات عن السياحة . ويمكن أن نتوقع صورة عكسية للتغير الموسمى لأرقام البطالة مثلا .

وهناك نوع رابع من التغير لا يمكن توضيحه جيدا على الرسم البيانى ، وهو ما نسميه « بالتغير المتبقى » . وهذا التغير كما يدل الأسم هو التغير الذى يتبقى فى البيانات المبحوثه بعد استبعاد الاتجاه والتغيرات الدورية والموسمية . وينتج التغير المتبقى أما عن حوادث عشوائية لا تتكرر مثل اضراب العمال ، أو الكوارث الطبيعية ، وأما عن أخطاء التدوين العادية التى تحدث عند جمع البيانات .



شكل ١٠ ـ ١

١٠ ـ ٢ تقدير المركبات

بعد أن عرفنا المركبات الأربعة للسلاسل الزمنية سنتناول طريقة تحليل السلاسل الزمنية الى مركباتها . وهناك سببان أساسيان للقيام بهذا العمل . أولا لأن هذا يمكننا من استبعاد الأثر الموسمى من البيانات الماضية ، ويسمى هذا بالتصحيح الموسمى . ويجرى هذا على سبيل المثال لأرقام البطالة والتجارة التى تنشر فى صورتها الخام ، وبعد تصحيحها موسميا . والسبب الثانى هو أن هذا التحليل يمكننا من التنبؤ بالقيم المستقبلية باستكمال أو مد الاتجاه الى الزمن المستقبل ، ثم اجراء التصحيحات المناسبة .

(أ) نماذج السلاسل الزمنية

لكى نستطيع اجراء تحليل السلاسل الزمنية إلى مركباتها يجب أن يكون لدينا نموذج بها.وهذا يعنى أن نحدد كيف تتجمع المكونات معا لتعطينا القيم المقاسة للسلسلة الزمنية .

والرموز القياسية المستخدمة هى أن يرمز للقيم المقاسة بالرمز A ، وأن يرمز للاتجاه بالرمز T وللتغيرات الدورية بالرمز C وللتغيرات الموسمية بالرمز S وللتغير المتبقى بالرمز R .

وهناك نموذجان شائعا الاستخدام . والنموذج الأول هو نموذج الجمع ، وفيه يفترض أن القيمة المقاسة A هى عبارة عن مجموع المكونات ، أى أن

$$A = T + C + S + R$$

والنوذج الثانى هو نموذج الضرب ، وفيه يعتبر أن القيمة المقاسة تساوى حاصل ضرب المكونات أى أن

$$A = T \times C \times S \times R$$

ونموذج الجمع هو النموذج الأسهل فى اجراء الحسابات ، وهو النوع الذى يستخدم فى الأجابة على أسئلة الامتحان المتعلقة بالسلاسل الزمنية ، وسنستخدم هذا النموذج لحل مثال عددى فى هذا الفصل .

ونموذج الجمع عيبه أنه يفترض أن مدى الأنواع المختلفة من التغير لا يتوقف على الأنواع الأخرى . وعلى سبيل المثال ، فإن هذا النموذج يفترض أن نفس الكمية الموسمية تضاف فى نفس الوقت من كل عام . ولكن عندما تكون السلسلة الزمنية طويلة الى حدا ما ، وبها اتجاه شديد الانحدار ، أو أثر دورى واضح ، فاننا نلاحظ أن التغيرات الموسمية يزداد مداها عندما يكون الأتجاه اكبر أو عندما نكون عند قمة الدورة عن مداها عند اتجاه منخفض ، أو عند قاع الدورة . ويأخذ نموذج الضرب هذه الظواهر فى الأعتبار بصورة أفضل حيث أنه يقوم بضرب عامل موسمى ثابت فى نفس الوقت من كل عام . فإذا كان الاتجاه والدورة بقيم صغيرة ، فإن النتيجة تكون صغيرة . ومع أن النموذج الذى سندرسه هنا هو نموذج الجمع الا أن القارىء لن يجد صعوبة فى تطبيق نفس الفكرة على نموذج الضرب . وكل المطلوب عندئذ هو استبدال عمليات الطرح بعمليات قسمة ، واستبدال عمليات الجمع بعمليات ضرب .

وعلى أية حال فان نموذج الجمع سيكون كافيا للحالات التى سنتناولها لأن السلاسل الزمنية المأخوذة فى الأعتبار قصيرة (وبالتالى لا يوجد بها أثر دورى واضح) وكل ما بها اتجاه تدريجى . وهكذا فان النموذج الذى سنركز عليه انتباهنا هنا هو نموذج الجمع المختصر .

$$A = T + S + R$$

(ب) طريقة التحليل

أول خطوة تجرى لتحليل سلسلة زمنية هى ايجاد الاتجاه T . وهناك عدة طرق لها درجات مختلفة من التعقيد لاجراء هذه العملية . وهناك طريقتان تقريبيتان جدا تستخدمان أحيانا . والأولى تجرى بتوقيع النقط على الرسم البيانى ، ثم رسم أفضل خط مستقيم يمر بينها « بالنظر ». والثانية هى طريقة أنصاف المتوسطات . وفيها نوجد متوسط النصف الأول من البيانات ونوقعه مقابل منتصف الفترة الزمنية التى ينتمى اليها ، ثم نوجد متوسط النصف الثانى من البيانات ونوقعه بنفس الطريقة ثم نوصل النقطتين بمستقيم نعتبره اتجاه السلسلة . ولكن الطرق الأساسية التى تستخدم عادة ـ وهى التى سنستخدمها لحل الأمثلة الواردة هنا ـ هى طريقة الانحدار ، وهى مشروحة بالفصل التاسع وطريقة المتوسطات المتحركة وسنشرحها فيما يلى :

وبعد ايجاد الاتجاه T يمكن اجراء الخطوة التالية فى التحليل بالرجوع الى النموذج $A = T + S + R$

ولماذا كانت القيم A معلومة باعتبارها هى البيانات الأصلية ، وكذلك قيمة T التى أوجدناها للتو يمكن طرح القيم المعلومة لـ T من القيم المعلومة لـ A للحصول على قيم $S+R$ حيث أن

$$A - T = S + R$$

والخطوة الثالثة هى إيجاد متوسط قيم $S+R$ عند الفترات الزمنية المختلفة . فإذا كانت البيانات المدروسة شهرياً ، فاننا نوجد متوسط قيم $S+R$ لكل أشهر يناير ثم نوجد المتوسط لكل أشهر فبراير ، ولكل أشهر مارس ، وهكذا . والفكرة وراء ذلك هى أن التغير المتبقى R عشوائى ، ولذلك فإنه بأخذ المتوسطات بهذه الطريقة نأمل فى استبعاد الظواهر العشوائية بحيث تبقى لدينا التغيرات الموسمية S لأوقات السنة المختلفة . وبالنسبة للبيانات الشهرية المذكورة أعلاه ، فاننا نعتبر أنه بعد أخذ المتوسطات سيكون لدينا الأثار الموسمية لأشهر يناير وفبراير ومارس و... الخ من أشهر السنة . ويستعمل كل

من الوسط والوسيط لهذا الغرض . وكون الوسيط لايتأثر بالقيم المتطرفة يجعله مرغوبا فيه فى هذه الحالة لأنه لو فرض وجود اضراب كبير فى أحد شهور فبراير مثلا ، فمن الأفضل استبعاد ذلك الشهر عند ايجاد متوسط $S+R$ لشهر فبراير . وهذا هو ما يقوم به الوسيط فى حين أن الوسط كان سينقل أثر الاضراب الى كل الحدود الداخلة فى الحسابات .

وتتوقف الخطوة الرابعة فى التحليل على الهدف منه . فاذا كان التغير المتبقى R فى فترة زمنية معينة يهمنا ، فاننا نستطيع ايجاده بعملية طرح اضافية .

$$A - T - S = R$$

أما اذا كان الغرض من التحليل اجراء التصحيح الموسمى لبيانات سابقة ، فإننا نطرح القيم المناسبة لـ S من قيم A الأصلية لنحصل على السلسلة الزمنية المصححة موسميا :

$$A - S$$

واذا كان الغرض هو التنبؤ بقيم مستقبلية ، فإن الخطوة الرابعة عندئذ ستتضمن استكمال الاتجاه فى المستقبل ، ثم اضافة الحد الموسمى المناسب ، أى أن القيم المستقبلية للمتغير توجد طبقا للمعادلة

$$A = T + S$$

ولا يؤخذ التغير المتبقى فى الاعتبار عند التنبؤ لأنه بطبيعته لا يمكن التنبؤ به .

وسنرى فيما يلى أمثلة للتصحيح الموسمى والتنبؤ .

(جـ) آلية التحليل

سنحل هنا مثالا تقليديا للتصحيح الموسمى لتوضيح طريقة التحليل بالتفصيل . وسنستخدم طريقة المتوسطات المتحركة لايجاد الاتجاه ثم سنستخدم الوسيط لقيم $S+R$ وسيساعدنا المثال على فهم طريقة المتوسطات المتحركة كما سنقوم بمقارنة للانحدار ولطريقة المتوسطات المتحركة لا يجاد الاتجاه .

مثال ١٠ ـ ٢ ـ ١ البيانات التالية تمثل اعداد الوحدات المباعة حسب بيانات ادارة المبيعات

الربع / السنة	1	2	3	4
1973	100	125	127	102
1974	104	128	130	107
1975	110	131	133	107
1976	109	132		

والمطلوب :

(أ) حساب متوسط متحرك لأربعة أرباع السنة للسلسلة .

(ب) حساب المبيعات بعد تصحيحها موسميا .

(جـ) رسم المبيعات الفعلية والمصححة موسميا على رسم بيانى واحد .

(د) التعليق على النتائج .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٧٧)

الاجابة يبين شكل (١٠ ـ ٢) الحسابات المجراه لحل الجزءين (أ) و (ب) وهى مرتبة فى الصورة المعتادة لحل الأسئلة من هذا النوع . وسنوضح فيما يلى خطوات الحل . والفكرة فى استخدام متوسط متحرك لكل أربعة أرباع فى الجزء (أ) هو أخذ متوسط لعام كامل ، أى مجموعة متكاملة من الفصول . وإذا كانت البيانات المعطاه بيانات شهرية ، فإن المتوسط المتحرك المناسب لهذه الحالة يكون المتوسط المتحرك لاثنى عشر شهراً . ومثل هذا المتوسط لا يتضمن أثرا موسميا .

ويعنى أخذ متوسط متحرك لأربعة أرباع أن نحسب متوسط لكل مجموعة من أربعة قيم متتالية بالبيانات . ويتضمن العمود المعنون A بشكل (١٠ ـ ٢) أرقام المبيعات المعطاه . وبالعمود التالى المعنون « مجموع أربعة أرباع » أول خطوة لحساب المتوسط المتحرك لأربعة أرباع . وبهذا العمود مجموع كل أربعة أرقام متتالية . وعلى سبيل المثال ، فإن الأرقام الأربعة الأولى وهى $Q1$ الى $Q4$ لعام 1973 . مجموعها 454 . والمجموعة الثانية من أربعة أرقام وهى من $Q2$ لعام 1973 الى $Q1$ لعام 1974 مجموعها 458 وهكذا . وهذه الأرقام مكتوبة عند النقط المتوسطة للفترات الزمنية التى تنتمى إليها . وفى هذه الحالة ، وحيث أن العام مقسم إلى عدد زوجى من الفترات فإن المجموع مكتوب عند منتصف المسافة بين نقطتين زمنيتين . ولذلك فإننا لانستطيع ببساطة إيجاد المتوسط بالقسمة على 4 لأننا نحتاج لقيم T عند نفس النقط الزمنية التى توجد عندها قيم A . وفى مثل هذه الحالات التى يكون فيها عدد النقاط فى العام زوجيا نقوم بحساب مجموع متحرك لخطوتين وذلك بجمع كل زوج من القيم المتتالية بعمود المجموع المتحرك الأول . وبذلك نحصل على عمود جديد عنوانه « مجموع خطوتين » . والقيم الواردة بهذا العمود منطبقة على النقط الزمنية المطلوبة ، ويمكن حساب قيم T بقسمة كل من قيم المجموع على عدد أرقام البيانات المستخدمة للحصول عليه ، وهو فى هذه الحالة 8 . ولو كانت البيانات شهرية لاحتجنا للقسمة على 24 .

		A	مجموعة أربعة أرباع	مجموع خطوتين	(a) T	$A - T = S + R$	(b) $A - S$
1973	$Q1$	100					111
	$Q2$	125					114
	$Q3$	127	454	912	114	13	114
	$Q4$	102	458	919	114.875	−12.875	115
1974	$Q1$	104	461	925	115.625	−11.625	115
	$Q2$	128	464	933	116.625	11.375	117
	$Q3$	130	469	944	118	12	117
	$Q4$	107	475	953	119.125	−12.125	120
1975	$Q1$	110	478	959	119.875	−9.275	121
	$Q2$	131	481	962	120.250	10.75	120
	$Q3$	133	481	961	120.125	12.875	120
	$Q4$	107	480	961	120.125	−13.125	120
1976	$Q1$	109	481				120
	$Q2$	132					121

	1973	1974	1975	الوسيط	S المصححة	S المدورة
$Q1$	–	−11.625	−9.875	−10.750	−10.828	−11
$Q2$	–	11.375	10.759	11.063	10.985	11
$Q3$	13	12	12.875	12.875	12.797	13
$Q4$	−12.875	−12.125	−13.125	−12.875	−12.953	−13
				0.313		
				$0.313 \div 4 = 0.07825$		

شكل ١٠ ـ ٢

وهكذا نرى أن طريقة المتوسطات المتحركة سهلة جدا فى التنفيذ ، وهى الطريقة القياسية التى تستخدم لحل المسائل من هذا النوع . ويمكننا مع ذلك أن نلاحظ بعض المشاكل التى ظهرت عند استخدامها ، والتى لم تكن لتظهر عند استخدام طريقة الانحدار الأكثر تعقيدا . ونلاحظ أولا أننا لا نحصل على قيم للاتجاه T لكل النقط الزمنية . فليس لدينا قيم لـ T للأرباع $Q1$ ، $Q2$ من عام 1973 ولا للارباع Q1 و $Q2$ من عام 1976 وهذا يعنى نقص المعلومات التى يمكن أن نبنى عليها حسابنا لمتوسطات $S+R$ فى المرحلة التالية . وثانيا نلاحظ أننا لانحصل على معادلة للاتجاه . وهذا ليس مهما جدا فى مسألة تصحيح موسمى من هذا النوع ، ولكنه يجعل الأمور أصعب لو كان المطلوب استكمال الاتجاه فى المستقبل لأغراض التنبؤ . وكما سنرى فى الجزء (١٠ ـ ٣) فاننا قد انتهينا الى تقريب خطى غير نقى أو الى أسلوب بيانى :

وبعد ايجاد قيم T فإن الخطوة التالية هى طرح هذه القيم من قيم A عند كل نقطة زمنية يمكن عندها اجراء هذا الطرح . وتكون النتيجة هى المجموعة من القيم المبينة بالعمود المعنون "$A - T=S+R$" .

ولايجاد متوسطات قيم $S+R$ تعاد كتابة تلك القيم فى جدول ثان ، كما هو مبين فى الجزء السفلى من شكل (١٠ ـ ٢) . وفى هذا الجزء رقمت الأعمدة بأرقام الأعوام ورقمت الصفوف طبقا « للفصول » ، أى أن المتوسطات المطلوبة تؤخذ على الصفوف . وقد أخذنا فى المثال الوسيط للقيم الواردة والنتائج معطاه فى العمود المعنون « الوسيط » ولابد أولا من اجراء تصحيح صغير للوصول الى قيم S . ولما كانت التغيرات الموسمية حسب التعريف هى اختلاف من أحد فصول السنة الى فصل آخر فانه لا يوجد تأثير موسمى على مدى كل الفصول مجمعة . وبالنسبة لنموذج الجمع ، فان هذا يعنى أن مجموع التأثيرات الموسمية يساوى صفرا . فإذا وجدنا كما فى هذه الحالة أن مجموع المتوسطات لا يساوى صفرا فانه يجب أجراء تصحيح لجعله صفرا ، وذلك بطرح متوسط المتوسطات وهذا يعطينا العمود المعنون « S المصححة » . وقد أجريت الحسابات فى هذا المثال لثلاثة أرقام عشرية ، ويجب أجراء الحسابات بدقة معقولة فى هذه المرحلة حتى لاتؤدى إلى أخطاء فى النتيجة النهائية . ومع ذلك فعند اعطاء النتيجة النهائية وهى الأرقام المصححة موسميا لايوجد مبرر لذكر أرقام عشرية بدقة أكبر من دقة الأرقام الأصلية . ولذلك فقد تم « تدوير » ـ تقريب ـ هذه الأرقام فى العمود المعنون "S المدورة " ـ المقربة ـ ثم طرحت هذه الأرقام المدورة من قيم A الأصلية لتعطى العمود المعنون "$A - S$" فى الجدول العلوى من شكل (١٠ ـ ٢) وهذه هى القيم المصححة موسميا المطلوبة بالجزء (ب) من السؤال .

ويبين الشكل (١٠ ـ ٣) الرسم البيانى المطلوب طبقا للجزء (جـ) من السؤال . وتظهر بالبيانات الأصلية تغيرات موسمية كبيرة منتظمة قيمها أكبر فى الربعين الثانى والثالث $Q2$ و $Q3$ منها فى الربعين الأول والرابع $Q4$ و $Q1$. وكما توقعنا ، فان الرسم البيانى للقيم المصححة موسميا المار بمنتصف الشكل أكثر انتظاما . ويعكس الرسمان اتجاها صاعدا برفق فى البيانات .

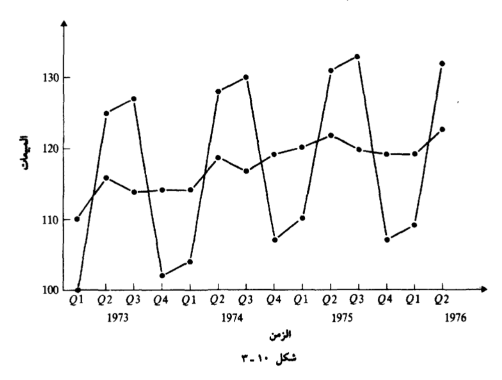
ولنعتبر الآن المثال التالى الذى يستخدم طريقة المتوسطات المتحركة ، ولكنه يستخدم الوسط ، وليس الوسيط لقيم $S+R$.

مثال ١٠ ـ ٢ ـ ٢ احسب للبيانات التالية : الاتجاه والتغيرات الموسمية (أو اليومية) المتوسطة والمتبقى .

وتمثل البيانات مبيعات أحد المتاجر بالنقد ، وهذا المتجر يغلق أيام الأثنين

الأسبوع رقم	1 £	2 £	3 £	4 £
اليوم				
الثلاثاء	360	350	380	390
الاربعاء	400	430	440	450
الخميس	480	490	490	500
الجمعة	600	580	590	600
السبت	660	680	690	690

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٧٩)



شكل ١٠ ـ ٣

الاجابة : المطلوب إيجاده فى هذه الحالة هو التغير المتبقى عند النقط الزمنية المختلفة .

كما أن هذا المثال يبين أن الأفكار المطبقة سابقا على سنة مقسمة الى أرباع أو شهور يمكن أن تطبق كذلك على البيانات الأسبوعية المقسمة الى أيام ولما كان التقسيم الى عدد فردى من الأيام ، فان ارقام المجموع المتحرك الأول تقع عند النقط الزمنية ، ولا حاجة الى المجموع المتحرك ذى الخطوتين يجعلها تنبطق على تلك النقط .

ويبين الشكل (١٠ ـ ٤) حل هذا المثال فى الصورة القياسية . وبالعمود A قيم البيانات الأصلية . ويحسب المجموع المتحرك لخمسة أيام من هذه القيم . ثم تقسم قيم المجموع المتحرك على 5 لتعطى الاتجاه T ثم تطرح قيم T من قيم A المقابلة لتعطى قيم $S+R$ ثم توجد بعد ذلك متوسطات هذه القيم على أيام الأسبوع المختلفة فى الجدول السفلى بشكل (١٠ ـ ٤) ثم تصحح وتدور لتعطى التغير الموسمى (من يوم ليوم) . وبعد ذلك يوجد التغير المتبقى فى العمود الأخير من الجدول العلوى بطرح قيم S من قيم $A-T$.

تمرين ١٠ ـ ٢ ـ ١ : يبين الجدول التالى مبيعات أحدى الشركات كل ثلاثة شهور بآلاف الأطنان لمدة ٤ سنوات

المبيعات	الربع 1	2	3	4
العام الأول	70	41	52	83
العام الثانى	78	44	48	85
العام الثالث	83	54	51	96
العام الرابع	85	49	54	89

		A	مجموع خمس أيام	الاتجاه المتوسط المتحرك T	$A-T$ $=S+R$	التغير المتبقى $A-T-S$
الاسبوع الأول	الثلاثاء	360				
	الاربعاء	400				
	الخميس	480	2500	500	−20	4
	الجمعة	600	2490	498	102	24
	السبت	660	2520	504	156	−5
الاسبوع الثانى	الثلاثاء	350	2500	500	−150	−9
	الاربعاء	430	2480	496	−66	8
	الخميس	490	2500	500	−10	14
	الجمعة	580	2530	506	74	−4
	السبت	680	2540	508	172	11
الاسبوع الثالث	الثلاثاء	380	2540	508	−128	13
	الاربعاء	440	2550	510	−70	4
	الخميس	490	2560	512	−22	2
	الجمعة	590	2570	514	76	−2
	السبت	690	2580	516	174	13
الاسبوع الرابع	الثلاثاء	390	2590	518	−128	13
	الاربعاء	450	2600	520	−70	4
	الخميس	500	2600	520	−20	4
	الجمعة	600				
	السبت	690				

	1	2	3	4	المتوسط	S
الثلاثاء	−	−150	−128	−128	−135.33	−141
الاربعاء	−	−66	−70	−70	−68.67	−74
الخميس	−20	−10	−22	−20	−18	−24
الجمعة	102	74	76	−	84	78
السبت	156	172	174	−	167.33	161
					29.33 ÷ 5 = 5.87	

شكل ١٠ ـ ٤

والمطلوب استخدام هذه المعلومات :

(١) لرسم المبيعات كل ثلاثة أشهر على رسم بيانى .

(٢) لاستنباط ورسم الاتجاه المتوسط المتحرك .

(٣) لحساب السلسلة المصححة موسميا باستخدام الوسيط لقيم $S+R$

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٤)

تمرين ١٠ ـ ٢ ـ ٢ : فيما يلى مبيعات احدى السلع لكل فترة ثلاثة أشهر فى الأعوام الثلاثة الماضية . ولهذه السلعة طابع موسمى واضح :

	الربع			
	1	2	3	4
1975	325	382	350	363
1976	393	452	430	421
1977	471	530	500	510

والمطلوب :

(١) استخدام طريقة المتوسطات المتحركة لايجاد الاتجاه .

(٢) تفكر الشركة فى استخدام القاعدة البسيطة التالية فى المستقبل لاكتشاف ما إذا كان اتجاه المبيعات للزيادة ، أو النقصان .

إذا كانت المبيعات فى الربع الثانى هى s_2 وفى الربع الرابع s_4 فإن المبيعات تتجه الى النقص اذا كان الفرق $s_2 - s_4$ أكبر من مقدار ما d .

احسب أى القيم التالية للمقدار d هى الأنسب .

$$-100, -70, -40, -10, 0, 10, 40, 70, 100$$

(استخدام متوسطات قيم $S+R$)

(ج م م ـ الأساس ب ـ يونيو ١٩٧٨)

١٠ ـ ٣ التنبؤ

التحليل الأساسى للسلسلة الزمنية

$$A = T + S + R$$

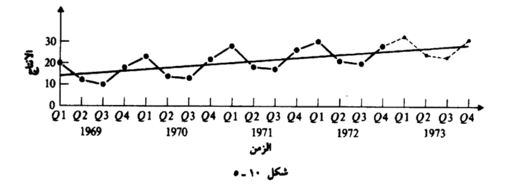
يبقى فى هذه الحالة ، كما كان فى الجزء ١٠ ـ ٢ . وكل الفرق هو أننا الآن نريد استخدام نتائج التحليل للتنبؤ بقيم المتغير A فى المستقبل .

وعندما يكون مطلوبا استخدام التحليل لهذا الغرض ، فمن المفيد أن نستخدم الانحدار لايجاد الاتجاه لأن هذه الطريقة تعطى معادلة يمكن استكمالها لتعطى القيم المستقبلية للاتجاه . وهكذا فإن المثال الأول الذى سنتناوله فى هذا الجزء يستخدم طريقة الانحدار كما هى مشروحة بالجزء (٩ ـ ٢) لايجاد الاتجاه . كما أنه يستخدم الوسيط لقيم $S+R$ لحساب التأثيرات الموسمية .

فيما يلى أرقام الانتاج ربع السنوى لشركة ما فى الفترة من عام 1969 الى عام 1972 وسيتم توفيق اتجاه على شكل مستقيم لهذه البيانات باستخدام الانحدار ، ثم استخدام نموذج الجمع للسلسلة الزمنية للتنبؤ بالانتاج فى الأرباع الأربعة لعام 1973 .

1969				1970				1971				1972			
Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4
20	12	10	18	23	14	13	22	28	18	17	26	30	21	20	28

ويبين شكل (١٠ ـ ٥) توقيع القيم المعطاه وتوصيلها بخط أسود بالطريقة المعتادة للرسم ألبيانى لسلسلة زمنية .



شكل ١٠ ـ ٥

والمستقيم الأسود هو خط الانحدار للنقط محسوبا بطريقة المربعات الصغرى باستخدام معادلة تتضمن a و b كما هو مبين أدناه . ويمكن الحصول على القيم المتوقعة لعام 1973 من هذا المستقيم بإضافة التغيرات الموسمية المناسبة إلى القيم التى نحصل عليها من المستقيم بعد استكماله لعام 1973 . ويبين الخط المتقطع هذه القيم المتوقعة .

ويبين شكل (١٠ ـ ٦) عملية التحليل الكاملة . والعمودين الأولين من الجدول الزمنى وأرقام الانتاج المعطاه .

ولكى نوجد الاتجاه نحاول أن نوفق خطا مستقيما له المعادلة

$$p = a + bt$$

لهذه البيانات حيث $p's$ هى أرقام الأنتاج و t تمثل الزمن . ويلزم أولا أن يكون الزمن فى صورة رقمية . ولهذا الغرض أخترنا الزمن « صفر » عند الربع الرابع من عام 1970 وأخذنا الربع كوحدة للزمن فحصلنا على قيم t المذكورة فى العمود الرابع .

ويمكن الآن أن نستخدم قوانين ايجاد a و b من الفصل التاسع . وفى مثالنا ستأخذ الصورة

$$b = \frac{\Sigma pt - (\Sigma p)(\Sigma t)/n}{\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2/n}$$

$$a = \frac{\Sigma p - b\Sigma t}{n}$$

		الانتاج P	الزمن ، t	pt	t^2	T	p − T = S + R
1969	Q1	20	−7	−140	49	14.375	5.625
	Q2	12	−6	−72	36	15.125	−3.125
	Q3	10	−5	−50	25	15.875	−5.875
	Q4	18	−4	−72	16	16.625	1.375
1970	Q1	23	−3	−69	9	17.375	5.625
	Q2	14	−2	−28	4	18.125	−4.125
	Q3	13	−1	−13	1	18.875	−5.875
	Q4	22	0	0	0	19.625	2.375
1971	Q1	28	1	28	1	20.375	7.625
	Q2	18	2	36	4	21.125	−3.125
	Q3	17	3	51	9	21.875	−4.875
	Q4	26	4	104	16	22.625	3.375
1972	Q1	30	5	150	25	23.375	6.625
	Q2	21	6	126	36	24.125	−3.125
	Q3	20	7	140	49	24.875	−4.875
	Q4	28	8	224	64	25.625	2.375
		Σp = 320	Σt = 8	Σpt = 415	Σt^2 = 344		

	1969	1970	1971	1972	الوسيط S
Q1	5.625	6.625	7.625	6.625	6.125
Q2	−3.125	−4.125	−3.125	−3.125	−3.125
Q3	−5.875	−5.875	−4.875	−4.875	−5.375
Q4	1.375	2.375	3.375	2.375	2.375
					الجملة = 0

شكل ١٠ - ٦

وهكذا يصبح لدينا

$$b = \frac{415 - (320 \times 8)/16}{344 - (64/16)} = \frac{415 - 160}{344 - 4} = \frac{255}{340} = 0.75$$

$$a = \frac{320 - 0.75 \times 8}{16} = 20 - 0.375 = 19.625$$

أى أن معادلة خط الانحدار بطريقة المربعات الصغرى هى p=19 625+0.75t.
وبعد أن حصلنا على خط الاتجاه يمكننا حساب قيم الاتجاه للعمود المعنون T بالجدول ، وذلك بتعويض قيم t التالية t=-7 ، t= −6 ، t=−5 ، . . . . . . ، t=6 ، t=7 ، t=8 فى المعادلة 19.625+0.75t (وعلى سبيل المثال 19.625−0.75×7=14375 وذلك لايجاد اول قيمة بالجدول) . وهنا يمكن استخدام النموذج $p=T+S+R$ ومنها نستنتج أن $p-T=S+R$ ويطرح قيم T التى أوجدناها من قيم p نحصل على عمود لقيم $S+R$.

ويستخدم العمود الأخير كالعادة ، كما هو موضح بالجدول السفلى بشكل ١٠ ـ ٦ ، لايجاد قيمة لـ S لكل موسم بأخذ متوسط قيم $S+R$ للمواسم المعينة (وحيث أن مجموع الوسيط هنا يساوى صفرا ، فلا حاجة لاجراء أى تصحيح) . وهكذا نحصل على الأرقام الموسمية الأربعة المذكورة . ويمكن الآن التنبؤ بالانتاج فى الأرباع الأربعة لعام 1973 وللربع الأول Q1 لدينا t=9 وبالتالى فان

$$T = 19.625 + 0.75 \times 9 = 19.625 + 6.75 = 26.375$$

وبالنسبة لهذا الربع $Q1$ فان القيمة الموسمية هى $S=6.125$

وبالتالى ، فإن القيمة المتوقعة للربع الأول $Q1$ عن عام 1973 هى

$$26.375 + 6.125 = 32.5$$

وللربع الثانى $Q2$ لدينا $S=5.375$ والاتجاه $T=19.625+0.75\times11=27.825$ وبالتالى ، فإن القيمة المتوقعة للربع الثانى $Q2$ من عام 1973 هى

$$27.125 - 3.125 = 24$$

وبالنسبة للربع الثالث $Q3$ لدينا $S=2375$ والاتجاه $T=19.625+0.75\times12=28.625$ وبالتالى ، فإن القيمة المتوقعة للربع الثالث $Q3$ من عام 1973 هى

$$27.825 - 5.375 = 22.45$$

وبالنسبة للربع الرابع $Q4$ لدينا $S=2375$ والاتجاه $T=19.625+0.75\times12=28.625$ وبالتالى ، فإن القيمة المتوقعة للربع الرابع $Q4$ من عام 1973 هى

$$28.625 + 2.375 = 31$$

وسنتناول الآن مثالا للتنبؤ سنوجد الاتجاه فيه بطريقة المتوسطات المتحركة .

مثال ١٠ ـ ٣ ـ ١ أرادت شركة للسفريات أن تحصل على فكرة عما تعنيه صورة السفريات بين المملكة المتحدة وجمهورية ايرلندا بالنسبة لأعمالها . ولهذا الغرض استخرجت الشركة الاعداد التالية للمسافرين (بالآلاف) بواسطة البحر كل ثلاثة أشهر من ايرلندا إلى المملكة المتحدة فى الفترة من عام 1966 الى عام 1969 .

1966				1967				1968				1969			
$Q1$	$Q2$	$Q3$	$Q4$	$Q1$	$Q2$	$Q3$	$Q4$	$Q1$	$Q2$	$Q3$	$Q4$	$Q1$	$Q2$	$Q3$	$Q4$
87	103	444	77	84	146	500	64	56	171	550	87	72	180	596	96

استخدم نموذج السلاسل الزمنية $A=T+S+R$ وطريقة المتوسطات المتحركة لايجاد الاتجاه والتغيرات الموسمية . ومن نتائج التحليل تنبأ بأرقام المسافرين فى الأرباع الأربعة من عام 1970 استخدم الوسيط لقيم $S+R$.

الاجابة : يبين شكل (١٠ ـ ٧) كل خطوات ايجاد الاتجاه والتأثيرات الموسمية . كما سبق اجراؤها بالجزء ١٠ ـ ٢ ولذلك فلن نعلق عليها هنا مرة أخرى . والسؤال الآن هو كيف نقوم باستكمال الاتجاه ، وكيف نضيف التأثيرات الموسمية اليه لنحصل على التنبؤ المطلوب . واحدى الطرق هى بتوقيع قيم T على رسم بيانى ورسم أفضل خط يتفق معها ، ثم قراءة القيم المقابلة للنقط الزمنية التى تهمنا . ويوضح شكل (١٠ ـ ٨) التوقيع البيانى لقيم T فى هذا المثال ، وأفضل خط يتفق مع هذه القيم فى تقدير المؤلف (وللقارىء أن يختلف مع هذا التقدير) .

وبقراءة قيم T المتوقعة للأرباع الأربعة لعام 1970 نحصل على

$Q1$	$Q2$	$Q3$	$Q4$
248.5	253.5	258.75	263.75

		A	مجموع أربعة أرباع	مجموع خطوتين	T	$A - T = S + R$
1966	Q1	87				
	Q2	103	711			
	Q3	444	708	1419	177.375	266.625
	Q4	77	751	1459	182.375	−105.375
1967	Q1	84	807	1558	194.750	−110.750
	Q2	146	794	1601	200.125	−54.125
	Q3	500	766	1560	195.000	305.000
	Q4	64	791	1557	194.625	−130.625
1968	Q1	56	841	1632	204.000	−148.000
	Q2	171	864	1705	213.125	−42.125
	Q3	550	880	1744	218.000	332.000
	Q4	87	889	1769	221.125	−134.125
1969	Q1	72	935	1824	228.000	−156.000
	Q2	180	944	1879	234.875	−54.875
	Q3	596				
	Q4	96				

	1966	1967	1968	1969	الوسيط	S
Q1	–	−110.750	−148.000	−156.000	−148.000	−141.0
Q2	–	−54.125	−42.125	−54.875	−54.125	−47.1
Q3	266.625	305.000	332.000		305.000	312.0
Q4	−105.375	−130.625	−134.125		−130.625	−123.6
					−27.75	
				$-27.75 \div 4 = -7$		

شكل ١٠ـ٧

وعندئذ سيكون لدينا للربع الأول Q1

$$T + S = 248.5 - 141.0 = 107.5$$

وبتدوير هذه القيم إلى نفس درجة الدقة التى أعطيت بها البيانات الأصلية يكون تقديرنا للقيمة المتوقعة للربع الأول Q1 من عام 1970 هو 108

وبالنسبة للربع الثانى Q2 لدينا

$$T + S = 253.5 - 47.1 = 206.4$$

وبالتالى ، فان القيمة المتوقعة للربع الثانى Q2 من عام 1970 هى 206

وبالنسبة للربع الثالث Q3 لدينا

$$T + S = 258.75 + 312.0 = 570.75$$

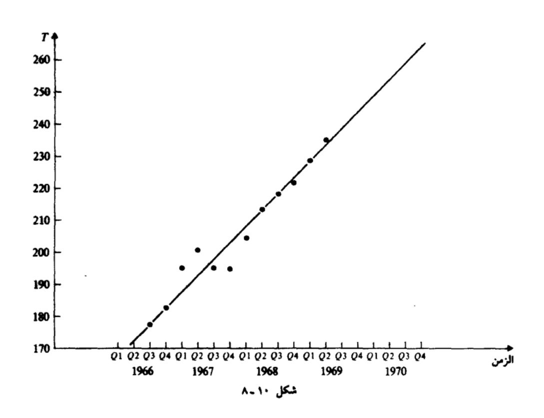
وبالتالى ، فان القيمة المتوقعة للربع الثالث Q3 من عام 1970 هى 571

وبالنسبة للربع الرابع Q4 لدينا

$$T + S = 263.75 - 123.6 = 140.15$$

وبالتالى ، فان القيمة المتوقعة للربع الرابع Q4 من عام 1970 هى 140

وعندما يكون النمو فى الاتجاه T منتظما بدرجة معقولة من نقطة الى أخرى كما هو الحال فى هذا المثال ، فهناك طريقة أخرى يمكن استخدامها بدلا من الرسم البيانى ، وهى حساب التغير المتوسط فى الاتجاه لكل ربع واضافة هذا التغير المتوسط مضروبا فى عدد الأرباع التى نريد أن يصل اليها التنبؤ الى آخر قيمة للاتجاه . وهذه الطريقة تقريبية ، ولكنها سريعة وبالنسبة للرسم البيانى فانها تعنى استخدام الخط المستقيم الذى يصل أول وآخر نقطة . ونستطيع أن نرى من شكل (١٠ ـ ٨) الذى رسم لهذا المثال أن هذا المستقيم ليس سيئا . ولذلك فسنستعمل هذه الطريقة لحساب التنبؤات للأرباع الاربعة لعام 1970 مرة أخرى .



شكل ١٠ ـ ٨

ويزيد الاتجاه من 177.375 فى الربع الثالث $Q3$ لعام 1966 الى 234.875 فى الربع الثانى $Q2$ من عام 1969 . وهذا يمثل زيادة كلية قدرها 57.5 حدثت على مدى 11 ربعا . وهكذا فان الزيادة المتوسطة لكل ربع هى $57.5 / 11 = 5.23$.

وهكذا فان القيمة المتوقعة لـ T فى الربع الأول $Q1$ من عام 1970 هى

$$234.875 + 3 \times 5.23 = 250.565$$

والقيمة المتوقعة لـ T فى الربع الثانى $Q2$ من عام 1970 هى

$$234.875 + 4 \times 5.23 = 255.795$$

والقيمة المتوقعة لـ T فى الربع الثالث $Q3$ من عام 1970 هى

$$234.875 + 5 \times 5.23 = 261.025$$

والقيمة المتوقعة لـ T فى الربع الرابع $Q4$ من عام 1970 هى

$$234.875 + 6 \times 5.23 = 266.255$$

وبالتالى يكون لدينا للربع الأول $Q1$ $T + S = 250.565 - 141.0 = 109.565$ وبالتدوير
تكون القيمة المتوقعة للربع الأول $Q1$ من عام 1970 هى 110

وبالنسبة للربع الثانى $Q2$ لدينا $T + S = 255.795 - 47.1 = 208.695$ وبالتدوير
تكون القيمة المتوقعة للربع الثانى $Q2$ من عام 1970 هى 209
وبالنسبة للربع الثالث Q3 لدينا $T + S = 261.025 + 312.0 = 573.025$
وبالتدوير تكون القيمة المتوقعة للربع الثالث من عام 1970 هى 537
وبالنسبة للربع الرابع Q4 لدينا $T + S = 266.255 - 123.6 = 142.655$
وبالتدوير تكون القيمة المتوقعة للربع الرابع من عام 1970 هى 143

تمرين ١٠-٣-١ : فيما يلى مبيعات احدى السلع ذات الطابع الموسمى الواضح لمدة ثلاث سنوات

	المبيعات (بالآلاف)					
	يناير / فبراير	مارس / ابريل	مايو / يونيه	يوليه / اغسطس	سبتمبر / اكتوبر	نوفمبر / ديسمبر
1973			10.3	12.8	20.3	32.4
1974	6.8	9.0	10.9	14.4	23.1	35.4
1975	7.0	9.5	11.6	15.3	24.5	37.4
1976	7.3	9.9				

١ - أوجد الاتجاه بواسطة الانحدار ثم استخدم النتيجة للتنبؤ بالمبيعات فى شهرى يوليو/ أغسطس عام 1976 .
٢ - أوجد الاتجاه بواسطة المتوسطات المتحركة :

(أ) استكمل الاتجاه بالرسم البيانى ، واستخدم النتائج للتنبوء بالمبيعات فى يوليو/ أغسطس عام 1976 .
(ب) استخدم تقريب النمو الخطى فى الاتجاه للتنبوء بالمبيعات فى يوليو/ اغسطس عام 1976 .

(ج م م - الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٦)

تمارين

١٠-١ الأرقام التالية تتعلق بالجزء الخاص بالطعام من الرقم القياسى لأسعار التجزئة .

	يناير 1962=100			
السنة	مارس	يونيو	سبتمبر	ديسمبر
1964	105.8	109.1	108.1	109.9
1965	110.4	112.5	111.7	113.3
1966	113.1	118.4	115.1	117.0
1967	117.5	121.8	116.7	120.1
1968	122.1	124.1		

والمطلوب :

(أ) حساب المتوسط المتحرك لأربعة أرباع السنة للسلسلة الزمنية أعلاه .
(ب) حساب التصحيح الموسمى لكل من الأرباع .

(جـ) تطبيق التصحيحات على السلسلة أعلاه للحصول على سلسلة مصححة موسميا لأسعار الطعام .
(د) ارسم كلا من السلسلة الأصلية والسلسلة المصححة على رسم بيانى واحد وعلق على النتائج .

(م م ت أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٦٩)

١٠ - ٢ يبين الجدول التالى عدد الخلافات التى وقعت فى أحدى الصناعات المؤممة كل ثلاثة أشهر فى الأعوام من 1966 الى 1971

السنة	الربع	العدد	السنة	الربع	العدد
1966	1	6	1969	1	9
	2	6		2	9
	3	9		3	17
	4	7		4	11
1967	1	5	1970	1	14
	2	6		2	13
	3	10		3	19
	4	6		4	15
1968	1	6	1971	1	15
	2	6		2	16
	3	12		3	21
	4	8		4	16

(أ) صحح هذه السلسلة الزمنية باستبعاد تأثير التغيرات الموسمية .
(ب) طبق طريقة المتوسطات المتحركة لتقدير الاتجاه على المدى البعيد .
(جـ) قدر عدد الخلافات فى كل ربع من أرباع سنة 1972 .

(م م أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٢)

١٠ - ٣ تتكون سلسلة زمنية من عدد من الموظفين ، n_t يتركون منظمة كبيرة شهريا فى فترة عشر سنوات حيث تأخذ t القيم $t=1,2,.....,120$

(أ) ما هو المقصود بعبارات « الأتجاه على المدى البعيد » و « التغيرات الدورية » و « التغيرات الموسمية » فى هذا المجال ؟
(ب) كيف يمكن بحث كل من الخواص اذا كان لدينا مجموعة معينة من البيانات ؟
(جـ) ما هى حدود التنبوء الاحصائى المبنى على سلسلة زمنية مدتها عشر سنوات من هذا النوع ؟

(م أ أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧٢)

١٠ - ٤ شركة لصناعة الأيس كريم لديها بيانات المبيعات التالية بآلاف الجالونات للسنوات الأربع الماضية وتريد الشركة الاستفادة منها للتنبوء بالطلب على منتجاتها فى السنوات القادمة .

السنة الأولى				السنة الثانية				السنة الثالثة				السنة الرابعة			
Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4	Q1	Q2	Q3	Q4
477	1237	2546	498	415	1437	2541	542	514	1372	2715	588	493	1511	2706	628

١ - وضح لماذا يمكن تجاهل التغيرات الدورية عند اعداد تنبوء من هذه الأرقام .

٢ - قارن بين طريقتى المتوسطات المتحركة والانحدار لايجاد الاتجاه فى المثال الحالى (لاداعى لاجراء الحسابات)

٣ - علق على التغيرات الموسمية الظاهرة فى البيانات وبين كيف يمكن استخدام نموذج الجمع للسلسلة الزمنية لحساب التأثيرات الموسمية .

٤ - اشرح كيف يمكن اجراء التنبوء المطلوب بعد الحسابات المذكورة فى الجزءين ٢ و ٣ وعلق على هذه الطريقة للتنبوء .

الفصل الحادى عشر
الارقام القياسية

١١ - ١ تكوين الأرقام القياسية

تستخدم الأرقام القياسية لاظهار الطريقة التى يتغير بها أحد المتغيرات التى تهمنا - وكثيراً ما يكون السعر - مع الزمن - ويعبر الرقم القياسى عن السعر فى الوقت الذى يهمنا (ويسمى الزمن المعلوم) كنسبة مئوية من السعر فى وقت آخر محدد (ويسمى زمن الأساس) وسنوضح فى هذا الجزء تكوين الأنواع المختلفة من الأرقام القياسية للبيانات المعطاه فى المثال التالى :

بيانات المثال

فى دولة المستقبل تقوم الحكومة بتدبير كل ضروريات الحياة للأفراد ، وطبقا للقانون سيكون مسموحا للأفراد بانفاق مرتباتهم على ثلاثة أنواع من السلع والخدمات فقط هى الدخان والسجاير ، والمشروبات ، والنقل العام . وستكون الكميات المتاحة لكل فرد من هذه السلع والخدمات مقننة . ويتغير كل من السعر ، والكمية مع الزمن حسب الجدول التالى :

	1994		1989		1984		
	الكمية	السعر	الكمية	السعر	الكمية	السعر	النوع
	1	8	1	5	2	2	الدخان
	5	20	3	12	2	3	المشروبات
	1	30	2	6	2	1	النقل

(البيانات مأخوذة من م أأ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧٧)

وكمثال بسيط جدا لنفرض أننا نريد حساب الرقم القياسى لسعر الدخان مستخدمين سنة 1984 كسنة الأساس ، وسنة 1989 كالزمن المعلوم . وسيكون هذا الرقم كما يلى :

$$\frac{5}{2} \times 100 = 250\%$$

أى أن السعر عند الزمن المعلوم $2\frac{1}{2}$ ضعف السعر عند زمن الأساس . وهذا يعنى وجود زيادة قدرها 150% فى سعر الدخان .

لاحظ أن النسبة بين

$$\frac{\text{السعر عند الزمن المعلوم}}{\text{السعر عند زمن الأساس}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

(ولا يعبر عنها كنسبة مئوية) تسمى « منسوب السعر » للدخان باعتبار سنة 1984 كنسبة أساس وسنة 1989 كسنة معطاه . وسنعود مرة أخرى لمناسيب السعر فيما بعد .

لاحظ كذلك أن قيمة الرقم القياسى عند زمن الأساس تساوى دائما 100 حيث أن

$$\frac{\text{سعر زمن الأساس}}{\text{سعر زمن الأساس}} \times 100 = 100 \times 1 = 100$$

ولذلك فمن المعتاد فى الاحصائيات المنشورة اعلان البيانات القياسية فى الصورة

15 يناير 1974 = 100

والمثال السابق بسيط جدا ، ولا يشمل الا سلعة واحدة . أما فى الواقع العملى ، فإننا نحتاج لتجميع التغير فى أسعار عدة سلع للحصول على رقم قياسى شامل مثل « الرقم القياسى لتكاليف المعيشة » . ولتوضيح هذه الفكرة سنقوم بتجميع التغيرات فى أسعار كل الدخان والمشروبات والنقل فى المثال بكل الطرق الممكنة .

الأرقام القياسية التى تعطى كل السلع وزنا متساويا

كخطوة أولى سنهمل الكميات المسموح بها من السلع المختلفة ، ونفكر فى الطرق التى يمكن بها تجميع الأسعار فقط للحصول على رقم قياسى .

١ ـ **الرقم القياسى التجميعى البسيط** لنفرض أننا نريد التعبير عن تكاليف المعيشة عام 1994 كنسبة مئوية من تكاليف المعيشة عام 1989 . وأبسط طريقة لعمل ذلك هى بجمع سعر الدخان + سعر المشروبات + سعر النقل ، ومقارنة المجموع عام 1994 بالمجموع عام 1989 . أى

$$\frac{8 + 20 + 30}{5 + 12 + 6} \times 100 = \frac{59}{23} \times 100 = 252.2\%$$

ويسمى هذا بالرقم القياسى التجميعى . والواقع أننا نقارن الأسعار المجمعة ببعضها

واذا كانت أسعار سنة الأساس يرمز لها بالرمز p_o وأسعار السنة المعطاه يرمز لها بالرمز p_n فان الرقم القياسى التجميعى البسيط يساوى .

$$\frac{\Sigma p_n}{\Sigma p_o} \times 100$$

٢ ـ الوسط البسيط لمناسيب الأسعار لنفرض مرة أخرى اننا نريد حساب رقم قياسى للأسعار باستخدام سنة 1989 كسنة أساس وسنة 1994 كسنة معطاه باستخدام الأسعار فقط . وهناك طريقة أخرى يمكن أن نتبعها وهى : بحساب رقم قياسى منفصل لكل سلعة ثم أخذ متوسط هذه الأرقام . ويمكن اجراء ذلك بحساب منسوب السعر لكل سلعة ، ثم ايجاد وسط مناسيب الأسعار ، وفى النهاية ضرب النتيجة فى 100 . وفى مثالنا يكون لدينا

$$\frac{8/5 + 20/12 + 30/6}{3} \times 100 = \frac{1.6 + 1.667 + 5}{3} \times 100 = \frac{8.267}{3} \times 100 = 275.6\%$$

وبصفة عامة ـ اذا كانت أسعار زمن الأساس هى p_0 وأسعار الزمن المعلوم p_n فإن الوسط البسيط لمناسيب الأسعار هو

$$\frac{1}{k}\sum\frac{p_n}{p_0} \times 100$$

حيث k عدد السلع .

تمرين ١١ ـ ١ ـ ١ احسب ما يلى

(أ) الرقم القياسى التجميعى البسيط .

(ب) الوسط البسيط لمناسيب الأسعار مستخدما سنة 1984 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معطاة .

وليس للأرقام القياسية التى تعطى وزنا متساويا لكل السلع استخدام كبير عمليا لأن بعض السلع أكثر أهمية من الأخرى ، ويجب اعطاؤ ها وزنا أكبر عند تحديد قيمة الرقم القياسى . ولكننا قمنا بدراسة هذا النوع لأن الأنواع الأخرى من الأرقام القياسية المستخدمة عمليا هى عبارة عن امتداد لهذا النوع من اعطاء أوزان مختلفة للسلع المختلفة . وتعرف هذه الأرقام باسم الأرقام القياسية التجميعية المرجحة والوسط المرجح لمناسيب الأسعار .

الأرقام القياسية التى تعطى أوزانا مختلفة للبنود المختلفة

١ ـ الأرقام القياسية التجميعية المرجحة . يمكن اعتبار عدد السلع من نوع معين المباعة ، أو المنتجة ، أو المستهلكة ، أو ما أشبه كمقياس لأهمية تلك السلعة عند تحديد التغير الكلى فى الأسعار . وهكذا فان أسعار السلع المختلفة ترجح بكميات تتعلق بفترة زمنية معينة للحصول على الأرقام القياسية التجميعية المرجحة . وهناك عدة أنواع مختلفة من الأرقام القياسية التجميعية المرجحة حسب الكميات المستخدمة كأوزان للترجيح والفترات الزمنية التى تنتمى اليها تلك الكميات .

(١) رقم لاسبيرز القياسى

فى هذا الرقم تستخدم الكميات المأخوذة من سنة الأساس كأوزان للترجيح وهكذا ، فان رقم لاسبيرز القياسى باعتبار سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة سيكون :

$$\frac{1 \times 8 + 3 \times 20 + 2 \times 30}{1 \times 5 + 3 \times 12 + 2 \times 6} \times 100 = \frac{128}{53} \times 100 = 241.5\%$$

وعموما لو رمزنا لأسعار سنة الأساس بالرمز p_0 ولكميات سنة الأساس بالرمز q_0 ولاسعار الزمن المعلوم بالرمز p_n تكون لدينا الصيغة التالية لرقم لاسبيرز

$$\frac{\Sigma(p_n q_0)}{\Sigma(p_0 q_0)} \times 100$$

تمرين ١١ ـ ١ ـ ٢ احسب رقم لاسبيرز القياسى مستخدما سنة 1984 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة .

(٢) رقم باش القياس

فى هذا الرقم تستخدم الكميات المأخوذة من السنة المعطاه كأوزان للترجيح وهكذا ، فان رقم باش القياسى باعتبار سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معطاة هو :

$$\frac{8 \times 1 + 20 \times 5 + 30 \times 1}{5 \times 1 + 12 \times 5 + 6 \times 1} \times 100 = \frac{138}{71} \times 100 = 194.4\%$$

وعموما لو رمزنا لكميات السنة المعلومة بالرمز q_n وللكميات الأخرى بنفس الرموز المذكورة أعلاه سنجد أن رقم باش القياسى يساوى

$$\frac{\Sigma(p_n q_n)}{\Sigma(p_0 q_n)} \times 100$$

تمرين ١١ ـ ١ ـ ٣ احسب رقم باش القياسى مستخدما سنة 1984 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة .

(٣) الرقم القياسى بطريقة السنة النموذجية

هذا الرقم هو أيضا رقم قياسى تجميعى مرجح حيث أنه يكون فى الصورة

$$\frac{\Sigma(p_n w)}{\Sigma(p_0 w)} \times 100$$ عند استخدامه كرقم قياسى للأسعار

والأوزان المستخدمة للترجيح فى هذه المرة هى كميات مرتبطة بزمن ليس زمن الأساس ، ولا الزمن المعلوم . وعلى سبيل المثال لنفترض أننا حسبنا الرقم القياسى باعتبار سنة 1984 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة ، ولكننا أخذنا كميات سنة 1989 . وعندئذ

$$\frac{8 \times 1 + 20 \times 3 + 30 \times 2}{2 \times 1 + 3 \times 3 + 1 \times 2} \times 100 = \frac{8 + 60 + 60}{2 + 9 + 2} \times 100 = \frac{128}{13} \times 100 = 984.6\%$$

ولو رمزنا لكميات تلك السنة ، وتعرف باسم **السنة النموذجية** بالرمز q_t مع بقاء باقى الرموز كما سبق ستكون الصيغة العامة للرقم القياسى بطريقة السنة النموذجية هى

$$\frac{\Sigma(p_n q_t)}{\Sigma(p_0 q_t)} \times 100$$

تمرين ١١ ـ ١ ـ ٤ احسب الرقم القياسى بطريقة السنة النموذجية باعتبار سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معطاه مع أخذ كميات سنة 1984 كأوزان للترجيح .

الأرقام القياسية للكميات والرقم القياسى للقيمة كل الأرقام القياسية التى تناولناها حتى الان كانت أرقاما قياسية للأسعار . وكانت هذه الأرقام تقارن تكاليف مجموعة محددة من السلع فى وقت ما بتكاليفها فى وقت آخر . وفى بعض الحالات ـ وعلى سبيل المثال : الرقم القياسى للانتاج الصناعى ـ يكون المطلوب مقارنة الكمية المنتجة فى وقت ما بالكمية المنتجة فى وقت آخر .

ويمكن الحصول على رقم قياسى تجميعى بسيط للكميات بمقارنة مجموع الكميات فى السنة المعطاة بمجموعها فى سنة الأساس . أى أن

$$\text{الرقم القياسى التجميعى البسيط} = \frac{\Sigma q_n}{\Sigma q_0} \times 100$$

ويمكن إيجاد وسط بسيط للمناسب بحساب منسوب الكمية q_n/q_o لكل بند ، ثم إيجاد متوسط تلك المناسيب .

$$\text{الرقم البسيط لمناسيب الكميات} = \frac{1}{k}\sum\frac{q_n}{q_0} \times 100$$

ويمكن قياس أهمية أى بند عند حساب الرقم القياسى للكميات عن طريق سعر ذلك البند . أى أن زيادة ما فى عدد سيارات الجاجوار المنتجة اكثر أهمية من نفس الزيادة فى عدد سيارات المينى . وهكذا نرى كيف يمكن ايجاد رقم قياسى كمى مرجح باستخدام الأسعار فى لحظة زمنية معينة كأوزان لترجيح الكميات فى كل من البسط والمقام . أى أن رقم لاسبيرز القياسى للكميات يكون :

$$\frac{\Sigma(q_n p_0)}{\Sigma(q_0 p_0)} \times 100$$

ورقم باش القياسى للكميات يكون :

$$\frac{\Sigma(q_n p_n)}{\Sigma(q_0 p_n)} \times 100$$

أما الرقم القياسى للقيمة ، فله نفس الصورة العامة مثل : الرقم القياسى التجميعى المرجح اذ يتكون أيضا من مجموع حاصل ضرب السعر × الكمية فى البسط مقسوما على مجموع آخر لحاصل ضرب السعر × الكمية . ولكن هذا الرقم ليس رقما قياسيا للأسعار ولا للكميات . إذ أنه يقيس التغير فى إجمالى قيمة المبيعات ، أو الأنتاج ، أو أى شىء مشابه كنتيجة للتغير فى كل من السعر والكمية وهكذا فان :

$$\text{الرقم القياسى للقيمة} = \frac{\Sigma(p_n q_n)}{\Sigma(p_0 q_0)} \times 100$$

ويبين البسط القيمة الاجمالية للمبيعات مثلا فى السنة المعطاه فى حين يبين المقام القيمة الاجمالية للمبيعات فى سنة الأساس .

واذا أخذنا سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معطاه يكون الرقم القياسى للقيمة مساويا

$$\frac{8 \times 1 + 20 \times 5 + 30 \times 1}{5 \times 1 + 12 \times 3 + 6 \times 2} \times 100 = \frac{8 + 100 + 30}{5 + 36 + 12} \times 100 = \frac{138}{53} \times 100 = 260.4\%$$

تمرين ١١ ـ ١ ـ ٥ : احسب الرقم القياسى للقيمة مستخدما سنة 1984 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معطاة .

تعليقات على الأنواع المختلفة من الأرقام القياسية التجميعية المرجحة

رقم لاسبيرز هو أكثر الأرقام القياسية التجميعية المرجحة استخداما . وفى الواقع ، فإن الرقم القياسى للانتاج الصناعى هو فى حقيقة الأمر رقم لاسبيرز كمى . وهذا الرقم مريح من وجهة النظر الادارية إذ أنه بعد إيجاد الأوزان المرجحة تبقى هذه الأوزان ثابتة حتى يتقرر الانتقال إلى تاريخ جديد للأساس . ومن جهة أخرى ، فانه إذا تغير موقف

الطلب ، أو الانتاج تغيرا كبيرا ، فقد يصبح نظام الترجيح غير متفق مع الموقف الحالى . كما يؤخذ على هذا الرقم أنه فى أوقات التضخم يميل إلى المبالغة فى إظهار معدل التضخم حيث أنه لايأخذ فى الاعتبار انخفاض الطلب على السلع التى إرتفعت أسعارها إرتفاعا كبيرا ، وأثر هذا الانخفاض على تكاليف المعيشة . وهناك ميزة أخرى لهذا النوع من الأرقام القياسية ، وهو أن كل قيمة تنشر لرقم لاسبيرز ضمن سلسلة من تلك القيم تشير لنفس المجموعة من السلع .

اما رقم باش فميزته أنه يشير إلى مجموعة حديثة من السلع ، وهكذا فانه يعبر عن التغير فى سعر تلك السلع التى تباع ، أو تنتج ... الخ ، حاليا ، ويكون هذا مفيدا بصفة خاصة : اذا كان الموقف يتغير بشدة . ويعيب هذا الرقم أنه يظهر معدل التضخم بأقل من حقيقته بسبب الانخفاض فى الطلب على بعض السلع التى ارتفع سعرها بسرعة . والمشكلة العملية الرئيسية بالنسبة لرقم باش هى فى كيفية إيجاد الأوزان الحديثة ، فقد تكون البيانات المطلوب جمعها لهذا الغرض مكلفة ، أو صعبة ، أو حتى مستحيلة . ولهذا السبب ، فإن رقم باش لايستخدم كثيرا . وفى كل مرة يحسب فيها رقم باش يكون المرجع مجموعة مختلفة من السلع ، ولذلك فإنه لايمكن مقارنة أرقام باش المتتالية فى سلسلة واحدة مقارنة مباشرة .

أما الرقم القياسى بطريقة السنة النموذجية فهو مفيد عندما تكون لدينا بيانات جيدة عن الكميات فى احدى السنوات بسبب انها كانت سنة لتعداد الانتاج مثلا فى حين أن سنة أخرى قد فضلت كسنة أساس ربما بسبب امكان مقارنتها مع أرقام قياسية أخرى . ولما كانت مجموعة السلع ثابتة ، فان هذا الرقم لايحتاج لجمع كميات كبيرة من البيانات للحصول على أوزان الترجيح ، كما أنه يعطى سلسلة من القيم تسهل مقارنتها ببعضها . وبالطبع فان الأوزان لن تكون حديثة ، كما فى رقم باش ، ولكن اذا كانت السنة النموذجية لاحقة على سنة الأساس فان الأوزان ستكون أحدث منها فى رقم لاسبيرز . وبالاضافة الى ذلك ، فان السنة التى تؤخذ الأوزان طبقا لها سنة متوسطة مما سيقلل من أثر تغييرات الطلب بين سنة الأساس والسنة المعطاة والناتجة عن تغير الأسعار على قيمة الرقم . أما اذا كانت السنة النموذجية سابقة لسنة الأساس ، فان هذه المشاكل « اللاسبيرية » ستزداد بدلا من أن تنقص .

٢ ـ الوسط المرجح للمناسب

هذا الرقم عبارة عن امتداد للوسط البسيط لمناسيب الأسعار . وفيه يؤخذ وسط مرجح للمناسيب بدلا من الوسط البسيط بضرب كل من المناسيب فى وزن معين ، ثم قسمة النتيجة على مجموع الأوزان . وهكذا فان الصيغة العامة للوسط المرجح لمناسيب الأسعار هى :

$$\frac{\Sigma(p_n/p_0)w}{\Sigma w} \times 100$$

ولايجرى الترجيح فى هذه الحالة بواسطة كميات ، كما فى حالة الأرقام القياسية التجميعية المرجحة ، وإنما بواسطة قيم (أى السعر × الكمية) ترجع إلى فترة زمنية معينة . وهنا أيضا يمكن إستخدام أوزان ترجيحية من أى فترة زمنية (ولكن الأرقام الناتجة لاتحمل أسماء أشخاص فى هذه الحالة) . ويسرى على الأزمنة التى يعود إليها الترجيح نفس ما قيل فى حالة الأرقام القياسية التجميعية المرجحة .

والوسط المرجح للمناسيب من الأرقام القياسية الهامة جدا عمليا . وأغلب الأرقام القياسية المنشورة فى المملكة المتحدة من هذا النوع . وسنرى فيما بعد السبب فى ذلك .

(١) الترجيح طبقا لقيم زمن الأساس

الأوزان المستخدمة للترجيح فى هذه الحالة هى $w = p_o\, q_o$

وبالنسبة لبيانات دولة المستقبل ، وباعتبار سنة 1989 كسنة أساس وسنة 1994 كسنة معلومة تكون قيمة هذا الوسط المرجح :

$$\frac{\frac{8}{5} \times (5 \times 1) + \frac{20}{12} \times (12 \times 3) + \frac{30}{6} \times (6 \times 2)}{(5 \times 1) + (12 \times 3) + (6 \times 2)} \times 100 = \frac{1.6 \times 5 + 1.67 \times 36 + 5 \times 12}{5 + 36 + 12} \times 100$$

$$= \frac{8 + 60 + 60}{53} \times 100 = 241.5\%$$

وهذه القيمة هى نفس ما حصلنا عليه عندما أوجدنا رقم لاسبيرز ، وليس هذا مستغربا لأن الصيغة :

$$\frac{\Sigma[(p_n/p_0)(p_0 q_0)]}{\Sigma(p_0 q_0)} \times 100 = \frac{\Sigma(p_n q_0)}{\Sigma(p_0 q_0)} \times 100$$

هى صيغة رقم لاسبيرز القياسى .

تمرين ١١ - ١ - ٦: أوجد الوسط المرجح طبقا لنسبة الأساس لمناسيب الأسعار باعتبار سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة :

(٢) الترجيح طبقا لقيم السنة المعلومة

فى هذه الحالة ، فان أوزان الترجيح هى $w = p_n\, q_n$ وبالنسبة لبيانات دولة المستقبل لو أخذنا سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة يكون الوسط المرجح مساويا .

$$\frac{\frac{8}{5} \times (8 \times 1) + \frac{20}{12} \times (20 \times 5) + \frac{30}{6} \times (30 \times 1)}{(8 \times 1) + (20 \times 5) + (30 \times 1)} \times 100 = \frac{1.6 \times 8 + 1.67 \times 100 + 5 \times 30}{8 + 100 + 30} \times 100$$

$$= \frac{12.8 + 167 + 150}{138} \times 100 = \frac{329.8}{138} \times 100 = 239.0\%$$

تمرين : احسب الوسط المرجح لمناسيب الأسعار طبقا للزمن المعلوم اذا كانت سنة 1984 هى سنة الأساس ، وسنة 1994 هى السنة المعلومة

(٣) الترجيح طبقا لقيم السنة النموذجية

فى هذه الحالة ، فان أوزان الترجيح هى $w = p_t\, q_t$ وتعود لسنة ما ليست سنة الأساس ولا السنة المعلومة . ويكون هذا مناسبا اذا كانت الأوزان المتاحة لأحدى السنوات جيدة . ولكن بفضل أخذ سنة أخرى كسنة أساس . وهذه الطريقة هى الطريقة المستخدمة لحساب الرقم القياسى لأسعار الجملة .

وبالنسبة لبيانات دولة المستقبل لو أخذنا سنة 1984 كسنة أساس وسنة 1994 كسنة معطاه وقيم سنة 1989 كأوزان يكون الرقم

$$\frac{\frac{8}{2} \times (5 \times 1) + \frac{20}{3} \times (12 \times 3) + \frac{30}{1} \times (6 \times 2)}{(5 \times 1) + (12 \times 3) + (6 \times 2)} \times 100 = \frac{5 \times 4 + 6.67 \times 36 + 30 \times 12}{5 + 36 + 12} \times 100 = 1170.0\%$$

تمرين ١١ ـ ١ ـ ٧ احسب الوسط المرجح لمناسيب الأسعار باعتبار سنة 1989 كسنة أساس ، وسنة 1994 كسنة معلومة وقيم سنة 1984 كأوزان للترجيح .

مقارنة الأنواع المختلفة من الأرقام القياسية

للأرقام القياسية التجميعية البسيطة ميزة هى سهولة الحساب ، ولكنها ليست نوعا مفيدا من الأرقام القياسية لسببين : الأول هو أنه ليس من الواقع فى شىء أن نفترض أن لكل السلع نفس درجة الأهمية بحيث تأخذ نفس الوزن عند حساب الرقم القياسى . والسبب الثانى ، وهو أكثر أهمية هو « مشكلة الوحدات » . فعند تكوين رقم قياسى للأسعار لسلع مقاسة بوحدات مختلفة لايكون واضحا كيفية استخدام الأسعار فى المجاميع المختارة . وعلى سبيل المثال ثمن كم من الدخان يجب أن يضاف لثمن سيارة ؟

وبالمثل فان الوسط البسيط للمناسيب سهل الحساب ، وان كان حسابه أصعب نوعا من حساب الرقم القياسى التجميعى البسيط . كما أنه يتغلب على مشكلة الوحدات حيث أن كلا من مناسيب الأسعار يتضمن النسبة بين سعرى نفس الكمية فى أوقات مختلفة . ومع ذلك فهذا الوسط يفترض أمرا غير واقعى ، وهو تساوى كل السلع فى الأهمية ، ولذلك فهو لايستعمل إلا نادرا .

أما الأرقام القياسية التجميعية المرجحة ، فهى أبسط نوع من الأرقام القياسية المرجحة فى الحساب . وفى هذه الأرقام تعطى أوزان مختلفة للسلع المختلفة ، ولذلك لاتوجد مشكلة للوحدات حيث أن الأوزان هى عادة أعداد من الوحدات .

وأصعب الأرقام حسابا هو الوسط المرجح للمناسيب ، ولكنه أكثرها استخداما . ولهذه الأرقام نفس المزايا مثل الوسيط البسيط للمناسيب كما أنها أيضا تعطى أوزانا مختلفة للبنود المختلفة.وميزتها الأساسية هى أنها تسمح بتجميع عدة أرقام قياسية منفصلة لمجموعات صغيرة من البنود معا باستخدام أوزانها للحصول على رقم قياسى شامل . ويستخدم هذا النوع من الأرقام القياسية بصفة خاصة لحساب الرقم القياسى لأسعار التجزئة الذى سنتناولة فى الجزء التالى .

تمرين ١١ ـ ١ ـ ٨

(أ) لماذا ترجح الأسعار عند تكوين رقم قياسى للأسعار عادة بواسطة الكميات ؟

(ب) فى أى الظروف يفضل ترجيح الأسعار بواسطة الكميات الحالية بدلا من كميات سنة الأساس ؟

(جـ) أجر الحسابات المناسبة لتقدير النسبة المئوية للزيادة الكلية فى الأسعار من عام 1970 إلى عام 1975 للسلع المبينة أدناه . أذكر اختيارك لنظام الترجيح

المنتج	1970		1975	
	الكمية المباعة (بالمليون)	الثمن (بـ £ لكل 1000)	الكمية المباعة (بالمليون)	الثمن (بـ £ لكل 1000)
توكات	1.6	6	2.4	10
كليبسات	3.4	9	3.0	12
مشابك	2.7	8	2.8	10

(جـ م م ـ الأساس ب ـ يونيو ١٩٧٦)

تمرين ١١ ـ ١ ـ ٩ : يتضمن رقما قياسيا لأسعار الطعام (FPI) السلع المبينة ادناه مرجحة طبقا للكميات التى تتناولها العائلة المتوسطة كما يلى :

الوزن	السعر	
7 أرغفة	20 بنسا/ رغيف	الخبز
20 رطلا	12 بنسا/ رطل	البطاطس
15 بينتا	8 بنسات/ بينت	اللبن
دستتان	40 بنسا/ دستة	البيض
10 أرطال	80 بنسا/ رطل	اللحم

وينتظر أن يرتفع سعر الخبز فى العام العام القادم بمقدار 10% وأن يرتفع سعر البطاطس بمقدار 25% وأن ينخفض سعر اللبن بمقدار 10% وأن ينخفض سعر البيض بمقدار 5% وأن يزيد سعر اللحم بمقدار 30% .

والمطلوب :

(١) حساب الرقم القياسى لسعر الطعام المتوقع بعد سنة إذا كان الرقم القياسى الحالى هو 112 .
(٢) حساب الرقم القياسى لسعر الطعام المتوقع بعد ثلاث سنوات اذا استمرت الأسعار فى التغير بنفس المعدل .
(٣) اذا إفترضنا أن الناس سينفقون أكثر على اللبن والبيض ، وأقل على اللحم خلال العام القادم ، فكيف يؤثر ذلك على الاجابة على الجزء الأول من السؤال إذا استخدم رقم قياسى مرجح طبقا للكميات الحالية ؟
(٤) لماذا يمكن للرقم القياسى للأسعار المرجح طبقا للكميات الحالية أن يكون غير مرض ؟
(جـ م م ـ الأساس ب ـ يونيو ١٩٧٧)

١١ ـ ٢ الرقم القياسى لأسعار التجزئة

هذا الرقم هو أكثر رقم يعرفه الناس بين كل الاحصائيات الرسمية فى المملكة المتحدة . ويلقى هذا الرقم قبولا عاما من طرفى العلاقات الصناعية ، ومن الناس عامة بغض النظر عن معتقداتهم السياسية كمؤشر للتضخم المحلى . وأحيانا تثار الاعتراضات على هذا الرقم لأنه لايعكس جيدا التضخم الذى تعانى منه بعض قطاعات المجتمع ، ولأنه يستبعد بعض العناصر التى يعتبر البعض أنه يجب أن يتضمنها مثل الجزء الخاص برأس المال فى سداد الرهونات ، والتأمين وأقساط المعاش وضريبة الدخل . ومع ذلك فنظرا لأن هذا الرقم تقوم بالاشراف على تحديده اللجنة الاستشارية للرقم القياسى لأسعار التجزئة (وبها ممثلون لكل من اتحاد العمال ، واتحاد الصناعات ، وجمعيات التجارة ، والمستهلكين فضلا عن موظفين تابعين لوزير العمل) فانه معترف به كمحاولة عادلة لاعطاء مقياس شامل للتضخم فى الأسعار . وعند التفاوض على الأجور يعترف الطرفان بهذا الرقم ، كما أنه مستخدم كأساس لبعض نظم الادخار التى تدعمها الدولة ، وقد ربطت به كثير من المعاشات وخاصة فى القطاع الحكومى ، وهناك بعض الأرقام القياسية الفرعية المشتقة منه تستخدم للتحديث السنوى لمبالغ التأمين . وسنبحث بعضا من هذه الاستخدامات فى البند ١١ ـ ٣ . ونظرا لأهمية الرقم القياسى لأسعار التجزئة ، فستناول فى هذا الجزء طريقة تكوينة .

وهذا الرقم هو فى واقع الأمر وسط مرجع لمناسيب السعر ، وتاريخ الأساس له هو ١٥ يناير عام ١٩٧٤

وليس ممكنا أن يتضمن الرقم القياسى كل أنواع السلع ، والخدمات التى يمكن تصورها كما أنه لن يتحسن ماديا لو تضمنها جميعا . والمطلوب فعلا هو اختيار عدد من السلع والخدمات الممثلة ، وقد اختير منها 350 . وتنقسم هذه البنود الى 95 قسما يمكن تصفيتها إلى 11 مجموعة . والخطوة الأولى هى الحصول على منسوب السعر لكل من البنود الـ 350 باعتبار يوم الثلاثاء الأقرب الى منتصف الشهر الذى سينسب الرقم اليه كزمن معلوم ويوم الثلاثاء الأقرب إلى منتصف شهر يناير السابق مباشرة كزمن أساس . وهذا يعنى ضرورة الحصول على 000 150 عرضا منفصلا للأسعار يوم الثلاثاء الأقرب الى منتصف كل شهر . ويمكن الحصول على بعض الأسعار مركزيا ، ولكن اكتشاف معظم الأسعار فى المحلات يتطلب قيام موظفى مكاتب اعانة البطالة بوزارة العمل بزيارة عينة محددة من المتاجر الموزعة على مدى البلاد لتسجيل الأسعار الفعلية للبيع .

وبعد الحصول على مناسيب الأسعار وعددها 350 يحسب وسط مرجح لكل من الأقسام وعددها 95 . والأوزان التى تستخدم لهذا الغرض هى النسب المحددة كجزء من ألف للأنفاق على كل من البنود الـ 350 طبقا لما تم تحديدة « باحصاء الانفاق العائلى » الذى تم اجراؤه فى العام المنتهى فى شهر يونيو الماضى . وهكذا ، فانه خلال كل سنة تستخدم مجموعة مختلفة من الأوزان . وهذا يجعل طريقة الترجيح فى هذا الرقم حديثة دائما .

وبعد إيجاد الأرقام القياسية للأقسام الـ 95 تجمع هذه الأخيرة معا باستخدام مجموعة أوزان كل قسم لتعطى الأرقام القياسية للمجموعات الـ 11 . وهنا نرى ميزة استخدام الوسط المرجح للمناسيب . ولو كان المستخدم هو رقم قياسى مرجح لكل من الأقسام الـ 95 لما أمكن استخدام هذه الوسيلة لتجميع الأرقام القياسية الجزئية .

وبتجميع الأرقام القياسية للمجموعات الاحدى عشرة مستخدمين أوزانها نحصل على الرقم القياسى الكلى للشهر المعنى كزمن معلوم وشهر يناير السابق كزمن أساس . وهكذا فان لدينا سلسلة من الأرقام القياسية القاعدية المرتبطة . وعند النشر يجب الرجوع إلى يناير عام 1974 كتاريخ أساسى . وهذا يعنى ضرب الرقم القياسى كما تم حسابه أعلاه فى جميع الأرقام من يناير إلى يناير حتى نصل إلى يناير 1974 . وعلى سبيل المثال ، فان الرقم القياسى المنشور لشهر يوليو 1976 يتم ايجاده كما يلى :

(الرقم القياسى المحسوب باعتبار شهر يوليو 1976 زمنا معلوما ، وشهر يناير 1976 زمنا أساسيا)
× (الرقم القياسى ليناير 1976 كزمن معلوم ، وشهر يناير 1975 كزمن أساسى)
× (الرقم القياسى ليناير 1975 كزمن معلوم ، وشهر يناير 1974 كزمن أساسى)

ونلاحظ أن حاصل ضرب الرقمين الأخيرين هو ما نشر كرقم قياسى فى يناير 1976 . وميزة هذه الطريقة على الطريقة الأخرى ، وهى ارجاع المناسيب الأصلية مباشرة الى سنة 1974 قبل حساب الوسط المرجح (وهو مايعطى سلسلة من الأرقام القياسية القاعدية المرتبطة) هى أنها تسمح بترجيح أى تغير نسبى فى الأسعار فى فترة ما طبقا لمجموعة حديثة من كميات السلع .

وتنشر كذلك أرقام قياسية منفصلة للأسر المكونة من فرد أو فردين على المعاش . ومع أن نظام الترجيح يختلف كثيرا عن ذلك المستخدم للرقم القياسى العام (الذى حذفت مثل تلك الأسر من حسابه ، وخاصة اذا كانت ثلاثة أرباع الدخل على الأقل من مصادر التأمين القومى) فان الرقم القياسى الفعلى لايختلف كثيرا عن الرقم القياسى العام . وهذا يجعلنا نطمئن إلى أن الرقم القياسى العام هو متوسط طيب لقياس التضخم .

وينشر الرقم القياسى لأسعار التجزئة شهريا بمجموعاته الرئيسية الاحدى عشرة وهى : الطعام ، المشروبات ، الدخان والسجاير ، الاسكان ، الوقود والانارة ، السلع المنزلية المعمرة ، الملبس والأحذية ، النقل والسيارات ، السلع

المتنوعة ، الخدمات ، الوجبات المشتراة والمستهلكة خارج المنزل . وتقسم بعض هذه المجموعات للنشر إلى مجموعات فرعية . وعلى سبيل المثال : فان مجموعة النقل والسيارات تقسم إلى مجموعتين فرعيتين هما : ركوب السيارات أو الدراجات ، وأجور الانتقال .

ويعطى لكل مجموعة ، ومجموعة فرعية لها رقمها القياسى ووزنها داخل الرقم القياسى العام بالاجزاء من ألف جزء .

وسنتناول المجموعة الفرعية « ركوب السيارات ، والدراجات » وهى جزء من مجموعة « النقل والسيارات » لنرى كيف تتكون من أقسام والبنود الممثلة لتلك الأقسام .

البنود	القسم	المجموعة الفرعية
ركوب السيارات والدراجات	شراء المركبات	طرازات محددة من السيارات المستعملة الدراجات بمحرك
	صيانة المركبات	تكاليف عمليات معينة اطارات السيارات والموتوسيكلات
	البنزين والزيت	البنزين زيت المحرك
	تراخيص المركبات	التراخيص السنوية للسيارات التراخيص السنوية للموتوسيكلات
	تأمين المركبات	التأمين الاجبارى لسيارات وموتوسيكلات معينة

وتأتى الاخبار الأولى عن الرقم القياسى لأسعار التجزئة فى نشرة صحفية تصدرها وزارة العمل عادة يوم الجمعة التالى بعد أربعة أسابيع ونصف من يوم الثلاثاء الذى جمعت فيه بيانات الأسعار . وينشر الرقم القياسى مقسما إلى مجموعات ومجموعات فرعية وأقسام لأول مرة فى العدد الشهرى من نشرة وزارة العمل . ثم يعاد نشره فى مختلف النشرات الاحصائية الملخصة بما فيها « الملخص الشهرى للاحصاء » و « الاتجاهات الاقتصادية » و « الملخص السنوى للاحصاء » .

تمرين ١١ - ٢ - ١ : كثيرا ما تستخدم مختلف قطاعات المجتمع الرقم القياسى لأسعار التجزئة وترجع اليه .

وضح كيف يمكن تكوين هذا الرقم القياسى ، ثم بين كيف يستخدم للمساعدة فى :

١ - الادارة

٢ - ممثلى العمال

٣ - المستهلكين .

١١ ـ ٣ تفسير الأرقام القياسية واستخدامها

(أ) التغيرات بالبنط وكنسبة مئوية

اعتبر المجموعة التالية من قيم الرقم القياسي لأسعار التجزئة :

16 أكتوبر عام 1973 (16 يناير 1962 = 100)
15 يناير عام 1974 (16 يناير 1962 = 100)
15 أكتوبر عام 1974 (15 يناير 1974 = 100)
15 يوليو عام 1975 (15 يناير 1974 = 100)

والزيادة من أكتوبر 1974 إلى يوليو 1975 هى 25.3 بنطا . ويجب ألا نشير الى هذه الزيادة باعتبارها نسبة مئوية (25.3%) والواقع أن التغير كنسبة مئوية هو

$$\frac{25.3}{113.2} \times 100 = 22.4\,\%$$

(ب) مقارنة قيم الرقم القياسي التى تستخدم أزمنة أساس مختلفة

إعتبر مرة أخرى المجموعة السابقة من قيم الرقم القياسي ولنفرض أننا نريد أن نقارن الرقم القياسي فى أكتوبر 1974 بقيمته فى أكتوبر 1973 . ومن الواضح أن المقارنة المباشرة مستحيلة لأن لهذين الرقمين تواريخ أساس مختلفة .

والطريقة الممكنة هى تحويل رقم أكتوبر 1973 إلى يناير 1974 كتاريخ أساس بالقسمة على رقم يناير 1974 المنسوب إلى يناير 1962 كتاريخ أساس . وهكذا نحصل على $96.7 = 100 \times 191.8 / 185.4$.

ويمكن الان مقارنة هذا الرقم ، بالرقم 1132 الخاص بأكتوبر 1974 مما يتضح معه وجود زيادة قدرها 16.5 بنطا .

(جـ) استخدام الأرقام القياسية كوسيلة للتكميش

فى أوقات التضخم يمكن استخدام الأرقام القياسية لعمل المقارنات بالأسعار الحقيقية ، وليس بدلالة النقود ، أو بمعنى آخر يمكن استخدامها كوسيلة للتكميش . واذا كان المطلوب بحث مستويات الأجور ، فمن المفيد أن نعرف مدى زيادة القوة الشرائية نتيجة لزيادة الأجور على مدى السنين ، وليس مجرد القيمة المطلقة للزيادة فى الأجور .

السنة	المرتبات المتوسطة للموظف	الرقم القياسي لتكاليف المعيشة	المرتب بأسعار 1966
1966	826	100	826
1967	931	102	913
1968	1025	107	958
1969	1099	113	973
1970	1300	120	1083

وفى المفاوضات السنوية لتحديد الأجور ، فان ممثلى العمال يحاولون الحصول على نسبة مئوية للزيادة فى أجور العاملين اللذين يمثلونهم أكبر من النسبة المئوية للزيادة فى الرقم القياسي لأسعار التجزئة فى العام المنصرم . وهذا ضرورى لكى تكون هناك زيادة حقيقية فى المرتبات ، أو « تحسن فى مستوى المعيشة » .

(د) نظم الادخار المرتبطة بالرقم القياسى

فى عام 1976 أنشأت الحكومة نظامين للادخار على أساس الرقم القياسى لأسعار التجزئة وتجرى الدعاية لهذين النظامين باعتبارهما طرقا للأدخار تسمح للمدخر بالمحافظة على قيمة نقوده الحقيقية بالرغم من التضخم ، وأحد هذين النظامين ـ وهو المخصص لمن يزيد عمرهم على 50 عاما ـ يسمح للمدخر بايداع أى مبلغ حتى 5000£ ويمكن استعادته فى أى وقت بعد مرور عام مصححا بمقدار التضخم . وهذا يعنى أن المبلغ سيضرب فى

$$\frac{\text{الرقم القياسى لأسعار التجزئة فى تاريخ السحب}}{\text{الرقم القياسى لأسعار التجزئة فى تاريخ الايداع}}$$

أما النظام الأخر ، وهو مفتوح للجميع فهو من نوع « ادخر مما تكسبه » . وفيه يودع المدخر أى مبلغ يريده شهريا حتى 50£ كحد أقصى لمدة خمسة أعوام . ويضرب كل مبلغ تم إيداعه فى نهاية مدة الأعوام الخمسة فى :

$$\frac{\text{الرقم القياسى لأسعار التجزئة فى التاريخ النهائى}}{\text{الرقم القياسى لأسعار التجزئة فى تاريخ الأيداع}}$$

وبعد ذلك يكون للمدخر الخيار فى ترك المبلغ المصحح المتجمع فى نهاية الخمسة أعوام لمدة عامين آخرين دون ايداعات جديدة . وفى نهاية العامين سيكون هناك تصحيح لأثر التضخم للمبلغ الاجمالى لمدة العامين بالاضافة الى منحة تصل إلى المبلغ المدفوع فى شهرين .

(هـ) التأمين المرتبط بالرقم القياسى

تشجع معظم شركات التأمين عملاءها على تقليل المخاطرة فى أن تكون مبالغ التأمين على المنازل ومحتوياتها أقل من قيمتها الحقيقية ، وذلك بتصحيح قيمة مبلغ التأمين سنويا باستخدام الأرقام القياسية المناسبة . وهذا يعنى ضرب مبلغ التأمين فى موعد تجديده فى التغير النسبى فى الرقم القياسى المعنى على مدى العام المنصرم . وبالنسبة للمبانى فان الرقم القياسى المستخدم هو رقم تكاليف البناء . أما بالنسبة لمحتويات المنازل الخاصة فالمعتاد أن يستخدم الرقم القياسى لمجموعة السلع المنزلية ، وهو جزء من الرقم القياسى لمجموعة السلع المنزلية ، وهو جزء من الرقم القياسى لأسعار التجزئة .

(و) محاسبة التكاليف الحالية

فى السنوات الأخيرة أصبحت الأرقام القياسية موضوعا لاهتمام خاص فى عالم المحاسبة بفضل الحديث عن محاسبة التكاليف الحالية . وقد ساهم فى المناقشات الدائرة فى هذا المجال مساهمة كبيرة التقدير الشهير المعروف باسم تقرير ساند يلاندز . وباختصار فان الحديث يدور عما إذا كان يجب تصحيح القيمة الدفترية للأصول الثابتة لاستبعاد اثر التضخم باستخدام الارقام القياسية المناسبة ، وكيفية اجراء هذا التصحيح . ولتسهيل هذه العملية فقد أصدرت الحكومة كتيبا عنوانه « استخدام الأرقام القياسية للأسعار لمحاسبة التكاليف الحالية (PINCCA) وذلك ضمن مجموعة « دراسات فى الاحصاءات الرسمية » وطريقة عمل التصحيحات بسيطة ومطابقة لما ذكرناه فى التطبيقات الأخرى . وتستعمل كثير من الهيئات الأن محاسبة التكاليف الحالية (CCA) لاظهار الصورة الحقيقية لمواقفها المالية وقد صدر تقرير عن ممارسات المحاسبة القياسية (SSAP 16) برقم لما يتناول محاسبة التكاليف الحالية .

تمرين ١١ - ٣ - ١ : فيما يلى بعض المقتطفات من مقال نشر بجريدة الديلى تليجراف بتاريخ 21 يناير 1978 .

« إستمر معدل التضخم فى الانخفاض فى الشهر الماضى مما جعل هدف الحكومة فى الوصول إلى زيادات فى الأسعار مكونة من رقم واحد ممكن التحقيق فى الشهر القادم أو الشهر التالى » .

« وقد إرتفعت الأسعار فى المتاجر بمقدار 0.5% فى شهر ديسمبر ، وكان هذا هو نفس معدل الزيادة فى الشهر السابق مما خفض المعدل السنوى للتضخم من 13% إلى 12.1% وقد ارتفع الرقم القياسى لأسعار التجزئة إلى 188.4 (يناير 1974 = 100) »

« وقد يشهد هذا الشهر انخفاضا أكبر فى معدلات ارتفاع الأسعار من سنة لسنة »

« . . . وسينخفض المعدل السنوى للتضخم إلى ما يقرب من 10% أو حتى أقل من ذلك »

« استمر التضخم ساريا فى الستة شهور الأخيرة بمعدل سنوى مقداره 5.3% »

المطلوب :

(أ) توضيح كيف أنه مع زيادة الأسعار فى المتاجر بمقدار 0.5% فى شهر ديسمبر انخفض المعدل السنوى للتضخم من 13% إلى 12.1% .

(ب) توضيح مايعنيه الرقم القياسى الذى مقداره 188.4 (يناير 1974 = 100) »

(جـ) توضيح المقصود بمعدلات ارتفاع الأسعار من سنة لسنة .

(م م ت أ - الأساس ب - مايو ١٩٧٩)

تمرين ١١ - ٣ - ٢ : الرقم القياسى لأسعار التجزئة هو المؤشر الرسمى للتضخم . ويحصل موظفو الدولة المحالون إلى المعاش على معاشات مرتبطة به . وأكثر من مليون من السيدات الأكبر من 60 عاما والرجال الأكبر من 65 عاما لديهم مدخرات طبقا لنظام « الشهادات الوطنية للادخار المرتبطة بالرقم القياسى للأسعار من اصدار التقاعد » . كما أن نحو نصف مليون من الأشخاص يدخرون أموالهم طبقا لنظام « ادخر مما تكسبه » المرتبط بالرقم القياسى وهذه النظم تضمن أن تحتفظ المعاشات والمدخرات بقدرتها الشرائية . ولايصبح هذا الضمان فعالا الا إذا كان الرقم القياسى يعكس المعدل الحقيقى للتضخم .

وضح مع الأسباب كيف يمكن للرقم القياسى لأسعار التجزئة ، ألا يعكس المعدل الحقيقى للتضخم لهؤلاء المتقاعدين والمدخرين .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٨)

تمارين

١١ - ١ : (أ) بين المقصود بالرقم القياسى ، ولماذا تحسب الأرقام القياسية ؟

(ب) ينبنى نوع من الأرقام القياسية على المناسيب والنوع الثانى على التجميع . ما هو الفرق بين هذين النوعين ، وما هى مزايا وعيوب كل نوع ؟

(م أأ - الجزء الأول - ديسمبر ١٩٧٧)

١١ - ٢ : تستخدم الأرقام القياسية على نطاق واسع فى الاحصاء التطبيقى . عرف ثلاثة أنواع رئيسية من الأرقام القياسية ، وصف خواص كل نوع بمثال (عدا الرقم القياسى لأسعار التجزئة) معروف لديك .

(م أأ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧٤)

١١ - ٣ : (أ) ماهى العوامل الأساسية التى تؤخذ فى الاعتبار عند تكوين رقم قياسى ؟ اربط ملاحظاتك بالرقم القياسى لأسعار التجزئة .

(ب) أنشىء ارقاما قياسية لأعوام 1971 و 1972 لحافظة الأسهم الموضحة أدناه مستخدما سنة 1970 كسنة أساس .

(افترض أن التغيرات مأخوذة من نفس المصدر فى نفس اليوم من سنوات متتالية ، وأنه لم يحدث انتقال لملكية الأسهم)

نوع الأسهم	عدد الأسهم	ثمن السهم 1970 £	1971 £	1972 £
صناعية	350	1.60	1.80	2.00
عقارية	200	4.60	5.00	6.50
استهلاكية معمرة	120	0.50	0.70	0.60
غذاء وملابس	150	0.40	0.40	0.50
متنوعة	160	1.00	0.90	0.50

(م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٢)

١١ - ٤ يبين الجدول التالى أرقام الرجال والنساء الذين يلتحقون بالعمل باحدى المؤسسات ومتوسط تكاليف تدريب الفرد من العاملين الجدد على مدى 15 عاما .

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
عدد الرجال	15	20	25	26	46	29	33	35	37	12	37	43	68	41	45
تكاليف تدريب الرجل	6	6	7	7	7	8	10	10	10	20	14	17	25	27	29
عدد النساء	47	49	44	37	14	45	46	48	49	53	55	57	17	58	52
تكاليف تدريب المرأة	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4

● الوحدة هى £10

(أ) المطلوب انشاء سلسلة من الأرقام القياسية تمثل تكاليف التدريب فى المؤسسة .

(١) ماهى السنة (أو السنوات) التى تختارها كأساس ولماذا ؟

(٢) ماهى السنة (أو السنوات) التى تعتبرها غير مناسبة كأساس ولماذا ؟

(ب) باستخدام السنة رقم (1) كأساس احسب مايلى للسنة رقم (8) :

(١) منسوب « التكاليف لكل رجل » ومنسوب » التكاليف لكل أمرأة »

(٢) الوسط البسيط لمناسيب « التكاليف لكل عامل جيد »

(٣) الوسط المرجح طبقا لفترة الأساس (بالاعداد) لمناسيب « التكاليف لكل عامل جديد » .

(٤) رقم باش القياسى ، ورقم لاسبيرز القياسى « للتكاليف لكل عامل جديد » باستخدام عدد العاملين الجدد ، كأوزان للترجيح .

(جـ) أى الأرقام القياسية المذكورة فى ((ب) ـ (٤)) أعلاه تعتبره أنسب مقياس للتغير فى تكاليف التدريب ولماذا ؟

(م أأ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٥)

الفصل الثانى عشر

الاحتمالات

١٢ - ١ نظرية الفئات الأساسية

سوف نعرض فى هذا الفصل بعض الأفكار الأساسية الخاصة بالفئات تمهيدا لدراسة الاحتمالات . وتعبير فئة يمكن أن يطلق على أى تجمع من الأشياء ، وتعرف مفردات هذه الأشياء على أنها عناصر بالفئة . وبوجه عام تكون المفردات فى مجتمع تبحث الدراسة لها عن عديد من الخصائص ، وبتقسيم المجتمع طبقا لهذه الخصائص تنشأ الفئات .

نفرض ، على سبيل المثال ، أن 200 من العاملين باحدى الشركات منهم 150 من الذكور و 50 من الاناث وأن 40 من الجامعيين و 160 غير جامعيين . نفرض أيضا أن 10 من الاناث جامعيات . فى هذا المثال ، يمكننا تكوين عدة فئات طبقا لنوع التقسيم مثل فئة العاملين من الذكور ، والعاملات من الاناث . كما يمكن أيضا اجراء التقسيم باعتبار فئة الجامعيين ، وغير الجامعيين .

ومن الأسئلة التى تجيب عليها نظرية الفئات الأساسية ، كم من المفردات ينتمى الى كل من الفئات المعينة المختلفة ، أو كم من المفردات ينتمى على الأقل إلى فئة من الفئات المعينة المختلفة يمكننا فى هذه الحالة أن نسأل :

١ - كم عدد العاملين من الاناث الجامعيات ؟

٢ - كم من العاملين من الاناث أو الجامعيات أو كليهما ؟

لكى نرى كيف تتعامل نظرية الفئات مع هذه الأسئلة نحتاج لادراج بعض المصطلحات . ويرمز للفئات عادة بحروف كبيرة .

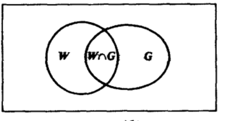
أرمز لفئة الاناث بالرمز W وفئة الجامعيين بالرمز G .

عدد الأعضاء فى هذه الفئات يرمز لهم بالرمز $|W|$ و $|G|$ ومن ثم $|W| = 50$ و $|G| = 40$.

سؤال (١) يسأل عن العدد الذى ينتمى إلى كل من W و G . هذه الفئات تسمى تقاطع W و G ويرمز لها بالرمز $W \cap G$. وقد أوضحنا فى المعلومات السابقة أن $|W \cap G| = 10$.

سؤال (٢) يسأل عن العدد الذى ينتمى إلى W أو الى G أو إلى كليهما . ويسمى هذا باتحاد W و G ويرمز له بالرمز $G \cup W$.

شكل ١٢ - ١ . يسمى بشكل فن ، ومساحات الأشكال تمثل رمزيا عدد الأعضاء فى الفئات المناظرة .



شكل ١٢ ـ ١

وبملاحظة الشكل نجد أن $|G| + |W|$ لاتساوى $|W \cup G|$ حيث أن المساحة فى التقاطع حسبت مرتين . ومن ثم يجب طرحها مرة . وهذا يعطى القاعدة الهامة :

$$|W \cup G| = |W| + |G| - |W \cap G|$$

وبالتالى فى هذا المثال نجد أن :

$$|W \cup G| = 50 + 40 - 10 = 80$$

بمعنى أن 80 من العاملين يكونوا إناثا أوجامعيات أوكليهما .

والمكملة للفئة هى إحدى مفاهيم نظرية الفئات الضرورية لدراسة الاحتمالات فالمكملة للفئة تتكون من جميع أعضاء المجتمع الذين لاينتمون لهذه الفئة . ومن ثم ففى هذا المثال تكون المكملة للفئة W والتى يرمز لها بالرمز $\bar{W}$ هى فئة كل الذكور العاملين

$$|\bar{W}| = 200 - 50 = 150$$

ومن أجل دراسة الاحتمالات فى هذا الكتاب لايلزم القارىء أكثر من هذه المعلومات فى نظرية الفئات لدراسة البند ١٢ ـ ٢ . وبما أن بعض الاختبارات تحتوى على أسئلة فى نظرية الفئات ، ومن ثم يختم هذا الفصل بمثال وتمرين من النوع المطروح .

مثال ١٢ ـ ١ ـ ١: عاملون لهم حق الاختبار لأحد ثلاث برامج : C,B,A وعليهم أن يعطوا صوتهم لأحد هذه البرامج ولكن إذا لم يكن لديهم أى تفضيل ، فانهم يعطون صوتهم للثلاثة ، أو إذا كانوا ضد أحد هذه البرامج ، فيعطون صوتهم للاثنين المفضلين .

عينة من 200 من الناخبين أعطت المعلومات التالية :

15 أعطوا صوتهم لـ A و B وليس لـ C

65 أعطوا صوتهم لـ B فقط ،

51 أعطوا صوتهم لـ C فقط ،

15 أعطوا صوتهم لكل من A و B ،

117 أعطوا صوتهم لـ A أو B أوكليهما ، ولكن ليس لـ C ،

128 أعطوا صوتهم لـ B أو C أوكليهما ولكن ليس لـ A .

كم أعطوا صوتهم لكل من :

(آ) البرامج الثلاثة

(ب) لبرنامج واحد

(جـ) A بغض النظر عن B أو C .
(د) A فقط .
(هـ) A و B وليس C .

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ نوفمبر ١٩٧٧)

الاجابة نرمز لفئات العاملين الذين أعطوا صوتهم للبرامج A و B و C بالحروف A و B و C على التوالى . الجزء (أ) من السؤال يسأل عن عدد العاملين الذين أعطوا أصواتهم للبرامج الثلاثة . أى كم عدد العاملين فى الفئة $A \cap B \cap C$.

أسهل طريقة للاجابة على هذا السؤال هى رسم شكل فن ، وايجاد الأعداد فى الفئات المطلوبة من ملاحظة الشكل . وشكل فن لهذا المثال معطى فى شكل ١٢ ـ ٢ .

(أ) من هذا الشكل نجد أن عدد العناصر فى A على حدة ، أو فى A و B ولكن ليس فى C يكون $52 = 117-65$. ومن ثم فان العدد الذى لايوجد فى $A \cap B \cap C$ يكون $195 = 15 + 128 + 52$.
ولكن العدد الكلى للعناصر هو 200 . إذن العدد فى $A \cap B \cap C$ يكون $5 = 195 - 200$. أى أنه يوجد 5 عاملين أعطوا صوتهم للبرامج .

(ب) عدد العناصر فى B و C ولكن ليس فى A يكون $12 = 51 - 65 - 128$ ومن ثم فان عدد العاملين الذين أعطوا صوتهم لأكثر من برنامج يكون $42 = 12 + 15 + 15$
وعدد العاملين الكلى هو 200 ومن ثم فان عدد الذين أعطوا اصواتهم لبرنامج واحد فقط هو $= 42 - 200$ 158 .

(جـ) عدد العناصر فى B أو C أو $B \cap C$ ولكن ليس فى A هو 128 والعدد الكلى فى A بغض النظر عن B أو C يكون $200 - 128 = 72$
أى أنه يوجد 72 من العاملين أعطوا صوتهم لـ A بغض النظر عن B أو C .

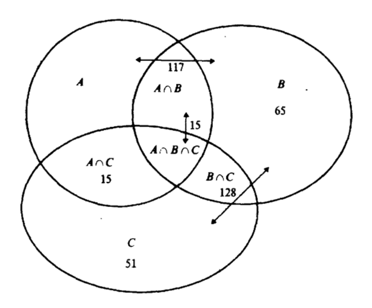
(د) من بين الـ 72 عامل فى A يوجد 15 فى $A \cap C$ ولكن ليس فى $A \cap B \cap C$ ومن ثم ، فان العدد فى A فقط يكون $72 - 15 - 15 = 42$
أى أنه يوجد 42 من العاملين أعطوا صوتهم لـ A فقط .

(هـ) يوجد 15 عنصرا فى $A \cap B$ وكما حصلنا فى (أ) يوجد 5 فى $A \cap B \cap C$ ومن ثم ، فان العدد فى $A \cap B$ وليس فى $A \cap B \cap C$ يكون $15 - 5 = 10$.
أى أنه يوجد 10 عاملين أعطوا صوتهم لـ A و B ولكن ليس لـ C .

ومجموعة العناصر التى تكون فى الفئة A ولكن ليست فى الفئة B يرمز لها بالرمز $A - B$ وتسمى الفرق للفئتين . ونلاحظ أن $A - B = A \cap B$ فباستخدام لغة الفئات يمكن كتابة المعلومتين فى المثال السابق على النحو التالى :

$(A \cup B) - C$ تحوى 117 عنصرا .
$(B \cup C) - A$ تحوى 128 عنصرا .

تمرين ١٢ ـ ١ ـ ١ آلة تتكون من ثلاثة أجزاء B,C و C . وعندما تم اختبار الالة تبين أنها تفشل اذا كان هناك خلل فى جزء أوجزئين ، وأحيانا يكون الخلل فى الأجزاء الثلاثة . وبتحليل 100 فشل لهذه الالة وجد 70 خللا للجزء A و 50



شكل ١٢ ـ ٢

خللا للجزء B ، و 30 خللا للجزء C . وأن 44 مرة كان سبب الفشل خللا فى جزءين فقط (بمعنى A و B أو A و C أو B و C) وأن 10 مرات من الـ 44 كانت بسبب خلل فى B و C أوجد كم مرة كان الفشل بسبب خلل فى :

(أ) كل الأجزاء الثلاثة .

(ب) الجزء A فقط .

وضح اجابتك باستخدام شكل فن .

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٥)

١٢ ـ ٢ تعريفات الاحتمالات

تعريف الاحتمال الذى سوف نتعرض له هو مايسمى بالتعريف الكلاسيكى ، وهو يعتبر الاحتمال بدلالة التكرارات فى المدى البعيد . من حيث المبدأ ، وهذا التعريف يجيز احتمالات مرتبطة فقط بتجارب يمكن تكرارها عددا لانهائى من المرات ، ولكن عمليا الاحتمال الكلاسيكى يمكن تطبيقه فى معظم الحالات التى يراد فيها تطبيق الاحتمال . والتعريف الكلاسيكى ينص على أنه اذا تكررت تجربة عدد لانهائى من المرات يكون الاحتمال لحادثة معينة هو نسبة تكرارات هذه الحادثة . منشأ هذه الفكرة ومعظم تطبيقاتها الواضحة تكون فى حالات المقامرة البسيطة مثل رمى العملة ، ودحرجة نرد ، ادارة عجلات الروليت أو سحب اوراق من أوراق اللعب . وسوف نشير إلى قليل من تجارب العملة والنرد لتوضيح بعض الأفكار الأساسية لكن إهتمامنا الرئيسى سوف يوضح بامثلة لاصلة لها بالمحاسبة .

افترض أن لدينا عملة منتظمة بمعنى أن وزن العملة موزع بانتظام فاذا القيت مثل هذه العملة لعدد لانهائى من المرات ، وكان نصف الرميات ستعطى صورة . اذن حسب التعريف الكلاسيكى للاحتمال يمكننا القول بأن احتمال الحصول على صورة لهذه العملة يكون 0.5 .

وهنا يلزم ادراج رمز موجز للتعبيرات الاحتمالية ، فالتعبير السابق « احتمال الصورة يكون 0.5 » يكتب .

$$P\ (\text{صورة}) = 0.5$$

افترض أيضا أننا دحرجنا نردا معتدلا عددا لانهائيا من المرات . وكان ثلث المرات سينتج 3 أو 6 ، فمن ثم يمكننا القول بأن احتمال أن كون الرقم قابل للقسمة على 3 هو ثلث

P (رقم قابل للقسمة على 3) = $\frac{1}{3}$

لاحظ أنه ينتج من التعريف الكلاسيكى أن مجموعة الاحتمالات المرتبطة بأى تجربة يكون 1 حيث أن أى تكرار (جزء واحد من التكرارات) يجب أن يكون نتيجة حدوث شيء .

وللحالات البسيطة مثل الحالتين السابقتين ، حيث جميع النتائج فى كل تكرار للتجربة تكون متماثلة الحدوث ، فان التعريف القياسى للاحتمال يختصر الى القول بأن احتمال حدوث حدث هو :

عدد نتائج الحدث
─────────────
العدد الكلى للنتائج الممكنة

ففى مثال قطعة النقود توجد نتيجتان ممكنتان . صورة وكتابة . ولذلك

P (صورة) $= \frac{1}{2} = 0.5$

أما فى مثال حجر النرد يوجد ست نتائج ممكنة 6,5,4,3,2,1 ومن هذه النتائج الست توجد قيمتان تناسب الحدث « يقبل القسمة على 3 » . لذلك

P (رقم قابل للقسمة على 3) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

وعند هذا الحد دعنا ننظر إلى أنه كيف أن أساس نظرية الفئات فى البند ١٢ ـ ١ يمكن أن يساعدنا فى التعامل مع الاحتمالات . ونحن نهتم فى الاحتمالات بالفئة التى عناصرها هى كل النتائج الممكنة للتجربة تحت الاعتبار ، ونهتم أيضا بالفئة الجزئية الخاصة بالنتائج المناسبة للحدث الذى نريد أن نعرف احتماله . ولهذا فمن الممكن الحصول على شكل توضيحى يمثل فئة جميع النتائج الممكنة للتجربة مع توضيح الفئات الجزئية التى نهتم بمعرفة احتمالاتها . وبدلا من أعداد العناصر ، كما فى الأمثلة بالبند ١٢ ـ ١ ، فان الأشكال التوضيحية التى تظهر الفئات الجزئية فى هذه الحالة سوف تكون الاحتمالات المناسبة .

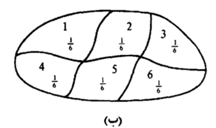
ففى مثال قطعة النقود ، نرى فى شكل (أ) ١٢ ـ ٣ ، أنه توجد نتيجتان ممكنتان ، كل منهما باحتمال 0.5 .
وفى مثال حجر النرد ، نرى فى شكل (ب) ١٢ ـ ٣ ، أنه يوجد ست نتائج ممكنة من بين هذه النتائج توجد النتيجتان 3 و 6 مناسبتان للحدث (يقبل القسمة على 3) .

وباستخدام أشكال فن ، فسوف تساعدنا فى النظر إلى احتمالات الأحداث المركبة والاحتمالات الشرطية ، كما سنرى فى الأجزاء القادمة .

وقبل أن نترك تعريفات الاحتمال فانه توجد كلمة يجب أن تقال عن التعريف الرئيسى والذى يسمى باحتمال بايبز . وقد إشتق هذا الأسم من توماس بايبز الذى كان من أوائل من نشر أبحاثا فى الاحتمال ولكنه بالتأكيد لم يبلور الأفكار المعروفة حاليا باسم احتمال بايبز . وقد استفاد بهذه الأفكار اخصائيون آخرون ، ونظروا إليها كامتداد منطقى لأفكار بايبز . وبايبز ينظر إلى احتمال الحدث على أنه « درجة الاعتقاد » بحدوث ، أوعدم حدوث الحدث . ومن الواضح أن درجة الاعتقاد تختلف من شخص لآخر . ولذلك فان هذا أحيانا يشار اليه بالاحتمال الذاتى . ويسمح هذا التعريف بالارتباط بالحالات التى لايمكن أن يطبق التعريف القياسى للاحتمال لأنهم لايكررون التجارب لعدد لانهائى من

المرات . فمثلا يجب أن نفكر فى إحتمال الحياة فى الكواكب الأخرى ، احتمال الحياة بعد الموت ، أو الأكثر شيوعا ، احتمال أن « هومر » كان أعمى .

وقد بدأ باييز باستخدام درجة الاعتقاد حول شىء ، ربما كعدد ، أو ربما كتوزيع احتمالى . وهذا يسمى « بالاحتمال المسبق » . بعد ذلك يجمع معلومات ويستخدمها ليحسن من درجة اعتقاده . هذا يؤدى إلى الاحتمال اللاحق ثم يمكن جمع معلومات أخرى وعمل تعديل وهكذا . وعندما نصل إلى نظرية باييز فى البد ١٢ ـ ٥ (والتى سوف نذكرها فى سياق الكلام عن الاحتمالات القياسية ، أو الكلاسيكية فاننا سوف نرى كيف يمكن التفكير فى إجراء باييز ، وكيف يمكن تنفيذه عمليا واحتمال باييز تعرض للجدل على مر السنين وبكل تأكيد من غير المناسب هنا أن نشغل أنفسنا بالنتائج الفلسفية للمعادلة . وعلى أى الأحوال ، فمن الشائع أن يلاحظ اعتراض أحد الأشخاص اعتراضا على أجابة باييز . ويظن أن الناس ليس لديهم درجة اعتقاد (أو بالتأكيد لايوجد واحد يمكن تحديده) حول موضوعات كثيرة . ماهى مثلا درجة اعتقادك للحياة على الكواكب الأخرى ، أو لعمى « هومر » ؟ باييز أشار فى اجابته الى أنه فى المواقف العملية ، وخاصة المواقف المالية أن الناس فى الحقيقة تملك درجة الأعتقاد حول الأشياء مثل ، الأرباح ، وأسعار الفائدة التى يقبلونها . وفى الحديث عن سباق الخيل تحدث درجات الاعتقاد حول قدرات الحيل المعينة التى تسدد الأرباح المقدمة . وبالتالى فان هذه الأرباح تكافىء احتمالات باييز .



(ب)



(أ)

شكل ١٢ - ٣

تمرين ١٢ ـ ٢ ـ ١ تجند شركة كبيرة عدد من المحاسبين للتدريب كل عام . وفى عام معين ، قدم تسعون طالبا من بينها :

63 لديهم خبرة عمل سابقة
36 اجتازوا مرحلة الاختبار الأساسى
27 لديهم الخبرة بالعمل واجتازوا مرحلة الاختبار الأساسى وهم ضمن المجموعتين السابقتين .

ارسم شكل فن مبينا احتمالات أن المتقدم له :
(أ) خبرة سابقة
(ب) اجتاز الأختبار الأساسى
(جـ) الاثنان معا .

(م م ت أ الأساس ب ـ مايو ١٩٧٩)

١٢ ـ ٣ قاعدة الجمع

يقال إن الحوادث متنافية بالتبادل ، إذا كان حدوث حدث منهم يعنى أنه لايمكن حدوث أى من الأحداث الأخرى .

فاذا رميت قطعة نقود مرة واحدة ، فان الحدثين « صورة » ، « كتابة » متنافية .

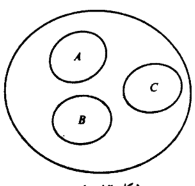
واذا دحرج حجر نرد مرة واحدة ، فان الحدثين « خمسة » ، « ستة » متنافية .

وعلى أى الأحوال فالحدثان « عدد زوجى » ، « يقبل القسمة على 3" ليست أحداث متنافية لأنه اذا كانت نتيجة الدحرجة ستة فان الحدثين يحدثان معا .

الحوادث المتنافية بالتبادل تعنى أنه لايوجد ، زوج منها له ناتج مشترك وبواسطة أشكال فن يكون الحال ، كما هو موضح فى الشكل ١٢ ـ ٤ . فاذا كانت الحوادث متنافية بالتبادل ، فان احتمال أن واحدا منها سوف يحدث (وبالتعريف لايمكن حدوث اكثر من واحد) هو مجموع احتمالات مفرداتها . ومن الشكل ، فان ذلك يمثل بالحقيقة التى تقول أنه إحتمال اتحاد حدثين غير متقاطعين هو مجموع احتمال كل منهما . ولهذا اذا كان A و B حدثين متنافيين ، فان **قاعدة الجمع للحوادث المتنافية** هى

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال ١٢ ـ ٣ ـ ١ دحرج حجر نرد منتظم مرة واحدة . ماهو احتمال الحدث خمسة ، أو عددا زوجيا ؟



شكل ١٢ ـ ٤

الاجابة P (رقم زوجى ∪ خمسة) = P (خمسة) + P (رقم زوجى)

$$= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{3}$$

فى حالة ما إذا كانت الأحداث غير متنافية بالتبادل اعتبر شكل ١٢ ـ ٥ وافترض مرة أخرى إننا نريد ايجاد $P(A \cup B)$ ، إحتمال حدوث A أو B . فى هذه الحالة لدينا امكانية أن A و B يحدثان فى نفس الوقت . واذا جمعنا احتمال كل النواتج فى A إلى إحتمال كل النواتج فى B سوف نكون أدخلنا قيمة احتمال النواتج المشتركة لكل من A و B مرتين . اذن إحتمال حدوث A و B معا يجب أن يطرح . وهذا يعطى **قاعدة الجمع العامة** :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال ١٢ ـ ٣ ـ ٢ : دحرجت زهرة نرد معتدلة مرة واحدة ، فما هو احتمال الحصول على عدد زوجى ، أو عدد قابل للقسمة على 3 ؟

الاجابة :

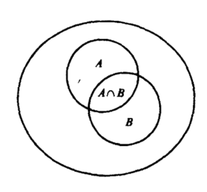
= (رقم زوجى U3 رقم قابل للقسمة على) P

= P (رقم زوجى) + P(3 رقم قابل للقسمة على) = $P(6)$

= $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$

= $\frac{2}{3}$

تمرين ١٢ ـ ٣ ـ ١ استخدم نفس المنطق السابق للحصول على صورة عامة لـ $P(A \cup B \cup C)$.



١٢ ـ ٤ قاعدة الضرب

تسمى الأحداث مستقلة اذا كان حدوث أى منها ليس له أى تأثير على احتمالات حدوث أى من الأحداث الأخرى .

كمثال للأحداث المستقلة افترض أننا رمينا قطعة نقود ، ودحرجنا حجر نرد . مايحدث بالنسبة لقطعة النقود ليس له أى صلة بما يحدث للنرد ومن ثم فان الحدثين « صورة فى قطعة النقود » ، و « 6 فى حجر النرد » ، سوف يكونان حدثين مستقلين . واذا كانت الأحداث مستقلة ، فان احتمال حدوثها جميعا يكون حاصل ضرب احتمالاتها الفردية .

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

وبالنسبة للمثال السابق فإن هذه القاعدة تعطى :

. P (6 فى النرد ∩ صورة فى قطعة النقود)

= P (صورة فى قطعة النقود) × P (6 فى النرد)

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{6}$ = $\frac{1}{12}$

ونتيجة هذا المثال يمكن التأكد منها من المبادىء الأولية . وبما أن التجربة لها 12 من النواتج الممكنة لهم نفس فرصة الحدوث :

$$H1 \ H2 \ H3 \ H4 \ H5 \ H6 \ T1 \ T2 \ T3 \ T4 \ T5 \ T6$$

إذن احتمال الحدث المعين $H6$ يكون $\frac{1}{12}$.

ويوجه عام قاعدة الضرب للأحداث المستقلة لها أهمية كبيرة باستخدامها مع قاعدة الجمع فى البند ١٢ ـ ٣ .

مثال ١٢ ـ ٤ ـ ١ وحدة تصنع على ثلاث مراحل : فى المرحلة الاولى تشكل فى واحدة من أربع ماكينات C,B,A ، و D بنفس الاحتمال . وفى المرحلة الثانية تشذب فى واحدة من ثلاث ماكينات F,E ، و G بنفس الاحتمال . وأخيرا

تلمع فى واحدة من ماكينتى تلميع H و I حيث التلميع فى I له ضعف احتمال التلميع فى H لأنها تعمل بضعف سرعتها . ماهو احتمال أن الوحدة تكون :

(أ) لمعت فى H ؟
(ب) تشذب فى F أو G ؟
(جـ) صنعت فى A أو B ، شذبت فى F ولمعت فى H ؟
(د) اما صنعت فى A ولمعت فى I أوصنعت فى B ولمعت فى H ؟
(هـ) صنعت فى A أوشذبت فى F ؟

(جـ م م - الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٥)

الاجابة

(أ) $P(H) + P(I) = 1$ بما أن الوحدة لابد أن تلمع فى H أو I

$P(I) = \frac{1}{2}P(H)$ بما أن لها ضعف احتمال التلميع فى H .

أى أن

$$P(H) + \tfrac{1}{2}P(H) = 1$$
$$\tfrac{3}{2}P(H) = 1$$

ومن ثم $P(H) = \frac{2}{3}$. أى أن احتمال أن الوحدة تلمع فى H يكون $\frac{2}{3}$.

(ب) ماكينات التشذيب الثلاث لهم نفس الاحتمال فى الاستخدام . اذن

$$P(E) = P(F) = P(G) = \tfrac{1}{3}$$

وأيضا $P(G \cup F) = P(G) + P(F)$ بما أن الماكينات متنافية بالتبادل .

اذن

$P($تهذيب فى F أو $G) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(جـ) ماكينات التشكيل الأربع لها نفس الاحتمال فى الاستخدام ، ومن ثم

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \tfrac{1}{4}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$

$P($شكلت فى A أو $B \cap$ شذبت فى $F \cap$ لمعت فى $H)$

$$= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{9}$$

حسب قاعدة الضرب بما أن الماكينات المستخدمة فى مراحل مختلفة تكون مستقلة .

(د) حسب قاعدة الجمع (المتنافى بالتبادل) $P[(A \cap I) \cup (B \cap H)] = P(A \cap I) + P(B \cap H)$

حسب قاعدة الضرب $= P(A)P(I) + P(B)P(H)$

$$= \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \times \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{4}$$

(و) حسب قاعدة الجمع العامة $P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F)$

حسب قاعدة الضرب $= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - P(A)P(F)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{2}$

مثال ١٢ ـ ٤ ـ ٢ وجد وكيل تأمين أنه بمتابعة الاستعلام عن العميل ، يكون احتمال بيع وثيقة تأمين هو 0.4 . ما إذا كان فى يوم معين لدى الوكيل عميلان مستقلان فما هو احتمال أن :

(أ) يؤمن على العميلين ؟

(ب) يبيع وثيقة واحدة فقط ؟

(جـ) يبيع وثيقة واحدة على الأقل ؟

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٧٧)

الاجابة:

(أ) P (بيع للاثنين) = P (بيع للأول A بيع للثانى)

حسب قاعدة الضرب = P(بيع للأول) ×P (بيع للثانى)

= 0.4 × 0.4 = 0.16

(ب) P (بيع واحدة فقط) = P (بيع للأول ∩ عدم بيع للثانى) ∪ (عدم بيع للأول ∪ بيع للثانى)

حسب قاعدة الجمع = P (بيع للأول ∩ عدم بيع للثانى) + P (عدم بيع للأول ∪ بيع للثانى)

حسب قاعدة الضرب = 0.4 × 0.6 × 0.4

= 0.24 + 0.24

= 0.48

(جـ) حسب قاعدة الجمع P (بيع على الأقل واحدة) = P (بيع واحدة فقط) + P (بين اثنين)

= 0.48 + 0.16

= 0.64

تمرين ١٢ ـ ٤ ـ ١ تتعرض وحدة منتجة بواسطة شركة لنوعين من العيوب A و B احتمال أن الوحدة بها عيب A هو $\frac{1}{6}$. احتمال أن بها عيبا B هو $\frac{1}{8}$, وذلك بغض النظر اذا كان بها العيب A . احسب احتمال أن الوحدة بها :

(أ) كلا العيبين A B ،

(ب) عيب واحد فقط A أو B ،

(جـ) لاعيب .

ماهى العلاقة البسيطة الموجودة بين اجاباتك لـ (أ) ، (ب) ، و(جـ) ؟

(جـ م م ـ الأساس ب ـ يونيو ١٩٧٩)

تمرين ١٢ ـ ٤ ـ ٢ بدأت فى نفس الوقت عمليتان مستقلتان A و B الوقت الذى تأخذه أى عملية غير معروف بالدقة ، ولكنه بالاحتمالات معطى كما يلى :

الاحتمال	عملية B الزمن (أيام)	الاحتمال	عملية A الزمن (أيام)
0.1	1	0.5	2
0.2	2	0.3	3
0.5	3	0.2	4
0.2	4		

أحسب احتمال أن :

(أ) كلا من A و B ينتهيان فى خلال 3 أيام

(ب) كلا العمليتين ينتهيان فى خلال 3 أيام ، ولكن ليس فى يومين .

(جـ) كلا العمليتين ينتهيان فى نفس الوقت .

(د) العملية B تنتهى قبل العملية A .

(جـ م م ـ الأساس بـ ـ ديسمبر ١٩٧٨)

١٥ ـ ٥ نظرية بايز

الاستقلال والتنافى بالتبادل يمكن اعتبار الواحد نقيض الاخر . اذا كانت الأحداث مستقلة فان حدوث أى منها لايؤثر على احتمالات حدوث الأخرين . واذا كانت الأحداث متنافية بالتبادل ، فان حدوث أى منها له تأثير مثير جوا على احتمالات حدوث الاخرين : أنه يلغى حدوثها وفى هذا الجزء سوف نعتبر حالة وسطى حيث حدوث حدث ما يؤثر بعض الشىء فى إحتمال حدوث حدث آخر باحتمال لايساوى الصفر . وهذا هو **الاحتمال الشرطى** . نحن نشير إلى احتمال حدث A فرضا ، بشرط حدث آخر B (يسمى الحدث الشرطى) قد تحقق .

والتعبير المتبع لهذا الاحتمال يكون $P(A|B)$ (تقرأ إحتمال A بشرط B)

ولكى يمكننا فهم كيفية تعريف هذا النوع من الاحتمالات أنظر شكل ١٢ ـ ٦ . ونحن نريد معرفة احتمال حدوث الحدث A اذا كان معلوما أن B قد تحقق . ولأن B قد تحقق فان النواتج الوحيدة الممكن حدوثها هى الموجودة فى الفئة B . اذن A يمكنها أن تحدث فقط اذا كان لدينا ناتج موجود فى كلا A و B أى أن (ناتج فى $A \cap B$) وفرصة حدوث هذا فى فرصة الناتج $A \cap B$ كنسبة من كل النواتج B الممكنة التى تحققت . أذن الاحتمال الشرطى لـ A بشرط B يعرف كالاتى : ـ

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A $A \cap B$ B

شكل ١٢ ـ ٦

مثال ١٢ ـ ٥ ـ ١ : تشير السجلات لأحد المناجم إلى أن احتمالات غياب أحد العمال يوم الاثنين أو يوم الجمعة أو كل من الاثنين والجمعة هى على التوالى 0.4 , 0.2 و 0.1.احسب احتمال أن عامل المنجم سيتغيب يوم الجمعة بشرط أنه كان متغيبا يوم الاثنين .

(م أأ ـ الجزء الأول ـ ديسمبر ١٩٧٧)

الاجابة :

$$P\,(\text{الجمعة} \mid \text{الأثنين}) = \frac{P\,(\text{الجمعة} \cap \text{الاثنين})}{P\,(\text{الاثنين})} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

ونظرية باييز هى نتيجة نحصل عليها من تعريف الاحتمال الشرطى ، وتسمح لنا أن نعبر عن احتمال شرطى بدلالة عكس الأحتمال الشرطى . وهذا عادة ما يكون مفيدا فى استخدامه كما سنرى فى الامثلة التالية :

لقد رأينا التعريف

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (١٢ - ١)$$

وبابدال الحروف يمكننا أن نكتب :

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \qquad (١٢ - ٢)$$

من (١٢ ـ ٢) ينتج أن :

$$P(B \cap A) = P(B \mid A)P(A) \qquad (١٢ - ٣)$$

ولكن $P(A \cap B)$ هى نفس الشىء مثل $P(B \cap A)$. ومن ثم يمكننا أن نعوض فى (١٢ ـ ١) فنحصل على :

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} \qquad (١٢ - ٤)$$

هذه صورة ابتدائية لنظرية باييز .

والنص المعتاد لنظرية باييز يكون باعتبار A واحدة من عدد من الأحداث المتنافية بالتبادل ، والتى تحتوى جميع النواتج . وكثيرا ما سيوجد حدثان : A و $\bar{A}$.

وفى سبيل صياغة النظرية بطريقة أعم ، افترض أنه يوجد أربعة من مثل هذه الأحداث A , X , Y و Z هذه الحالة موضحة فى شكل ١٢ ـ ٧ ويمكننا اذا أردنا تجزىء إلى أربعة أجزاء مثل

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap X) \cup (B \cap Y) \cup (B \cap Z)$$

الأجزاء الأربعة متنافية بالتبادل ، ومن ثم قاعدة الجمع تعطى

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap X) + P(B \cap Y) + P(B \cap Z)$$

والحدود فى الطرف الأيمن يمكن إعادة كتابتها للاستخدام (١٢ ـ ٣) لنحصل على

$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid X)P(X) + P(B \mid Y)P(Y) + P(B \mid Z)P(Z)$$

وبالتعويض فى المقام فى الطرف الأيمن لـ (١٢ ـ ٤) نحصل على نظرية بايز فى الصورة :

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid X)P(X) + P(B \mid Y)P(Y) + P(B \mid Z)P(Z)}$$

وفى حالة الاستخدام العادى حيث يكون التجزىء الى A و $\bar{A}$ تتحول العلاقة إلى

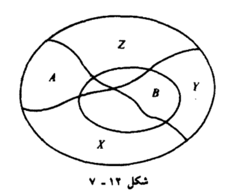
$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \bar{A})P(\bar{A})}$$

والصورة العامة لنظرية بايز تعتبر التجزىء الى أحداث متنافية بالتبادل وشاملة للأحداث A_1 , A_2 , A_3 ,........, A_n وتنص على

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

ومن هذه النصوص لنظرية بايز على مستويات مختلفة من التعميم نستطيع إدراك بعض مفاهيم احتمال بايز ، كما هو مشار اليه فى البند ١٢ ـ ٢ . أن $P(A)$ هو إحتمال سابق لحدوث الحدث A . والمشاهدات تدون فى أثناء حدوث B .

ونحن نعلم أن $P(B|A)$ هى إحتمال حدوث B اذا A تحققت . كما نعلم أيضا أن الاحتمال الشرطى لحدوث B بشرط تحقق جميع الأحداث عدا A ولدينا الاحتمالات السابقة لهذه الأحداث . وبادخال جميع هذه الاحتمالات الشرطية ، والاحتمالات السابقة معا فى صيغة نظرية بايز نحصل على الاحتمال التابع $P(A|B)$ للحدث A بشرط تحقق B .



شكل ١٢ ـ ٧

مثال ١٢ ـ ٥ ـ ٢ : شركة بترول تنقب فى بحر الشمال قدرت أنها ستنجح فى إيجاد بترول بكميات اقتصادية فى حقل ما باحتمال 60% وبعد اجراء أول تنقيب اختبارى كانت النتائج مرضية .

واذا فرض أن 0.3 هى قيمة احتمال أن التنقيب الاختبارى يعطى نتيجة خاطئة فما هوالاحتمال المعدل باستخدام نظرية بايز لايجاد كميات اقتصادية من البترول ؟

(م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٧٧)

الاجابة : باستخدام الرموز السابقة ، سوف نستخدم الرمز A لنشير إلى أنه يوجد بترول ، والرمز B لنشير إلى أن التنقيب سيكون موفقا .

هذه الحالة بها حدثان فقط ، أما أن يوجد بترول A أو لا يوجد بترول A

المطلوب إيجاد P (تنقيب موفق| بترول) . والاحتمال السابق للبترول يكون 0.6 = P (بترول) ومن ثم 0.4 = P (لابترول) . وحيث أن احتمال التنقيب يعطى نتيجة خاطئة هو 0.3 يمكننا استنباط الاحتمالات الشرطية اللازمة لنظرية بابيز .

P (تنقيب موفق | بترول) = 0.7 و P (تنقيب موفق | لابترول) = 0.3

ومن ثم باستخدام نظرية بابيز فى الصورة

$$P(A \mid B)=\frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A)+P(B \mid \bar{A})P(\bar{A})}$$

نجد أن P(بترول تنقيب موفق)

= (تنقيب موفق | بترول) (بترول) / [(تنقيب موفق | بترول) (بترول) + (تنقيب موفق لابترول) (لابترول)]

$$=\frac{0.7 \times 0.6}{0.7 \times 0.6+0.3 \times 0.4}=\frac{0.42}{0.42+0.12}=0.78$$

تمرين ١٢ ـ ٥ ـ ١: فى شركة مايدون نوبات الغياب عن العمل بدلالة فترة (ثلاثة أيام أو أقل ، أكثر من ثلاثة أيام) مع وجود شهادة طبية من عدمه . وفى قسم ما إحتمال أن تستمر نوبة الغياب أكثر من ثلاثة أيام يكون 0.4 واحتمال صرف شهادة طبية اذا استمرت نوبة الغياب أكثر من ثلاثة أيام يكون 0.75 وعلى أى الأحوال اذا كانت مدة التغيب ثلاثة أيام أو ، أقل ، فان إحتمال صرف شهادة طبية يكون 0.1 .

واذا علم أن الشهادة الطبية قد صرفت ، أوجد باستخدام نظرية بابيز أن مدة التغيب استمرت أكثر من ثلاثة أيام .

تمرين ١٢ ـ ٥ ـ ٢ :آلة الكترونية تتكون من جزءين A و B .

P (يعطل A) = 0.2

P (يعطل B | يعطل A) = 0.75

P (يعطل B | لايعطل A) = 0.15

أوجد :

(أ) P (يعطل A | يعطل B)

(ب) P (يعطل A | لايعطل B)

١٢ ـ ٦ التباديل والتوافيق

فى هذا الجزء سوف نهتم بعدد الطرق التى يمكن أن نختار بها أشياء من ضمن فئة كبيرة أو عدد الطرق التى يمكن أن ترتب بها . وسنهتم أولا بالتباديل ، ثم بالتوافيق ، وأخيرا بمسائل عامة تحوى اختبارات وترتيبات ، تجسد الأفكار

الأساسية . وهذا الموضوع هام جدا بالنسبة للاحتمالات ، كما سنرى عند دراسة توزيع ذى الحدين فى الفصل الرابع عشر .

بدراسة التباديل (أو الاختيارات كما تسمى أحيانا) نحن نفكر فى حالة حيث جميع ترتيبات الأشياء تعتبر مختلفة عن بعضها البعض ، أى أن جميعها متميز . افترض أن لدينا n من العناصر . ونريد معرفة بكم طريقة مختلفة يمكننا اختيار فئة مكونة من r من العناصر . هذا هو عدد التباديل لـ r من n ويرمز لها بالرمز $_nP_r$.

العنصر الأول يمكن اختياره بـ n طريقة . وهذا العنصر لايكون متاحا اختياره فى الاختيار الثانى . إذن يوجد $(n\text{-}1)$ طريقة يمكن أن يختار بها العنصر الثانى . ومن ثم فان عدد الأزواج المختلفة التى يمكن أن تظهر كأول عنصرين هى

$$n \times (n-1)$$

والآن يوجد عنصران غير متاحين ، والعنصر الثالث يمكن اختياره بـ $(n - 2)$ من الطرق . ومن ثم فان عدد المجموعات المختلفة المكونة من ثلاثة عناصر ، والتى يمكن أن تظهر كأول ثلاثة عناصر فى مجموعتنا المختارة هى

$$n \times (n-1) \times (n-2)$$

وبالاستمرار بنفس المنطق إلى إختيار r من العناصر نجد أن عدد المجموعات الممكنة المختلفة المكونة من r من العناصر هى

$$_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times [n-(r-1)]$$

وهذا ممكن كتابته بصورة أكثر اناقة اذا أدخلنا رمز المضروب .

الرمز $n!$ وتقرأ « مضروب n » وتعنى n مضروبة على التوالى باعداد صحيحة أقل من التى تسبقها حتى 1 . فمثلا

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

وبوجه عام :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

(لاحظ الاتفاق الخاص $0! = 1$ والتى لاتنتج فى التعريف العام للمضروب . والاتفاق $0!$ يمكن أن يكون مفيدا فى حسابات توزيعات ذات الحدين والبواسون . أنظر الفصل الرابع عشر) . وبالرجوع إلى التعبير $_nP_r$ يمكننا اذا أردنا كتابته فى الصورة

$$_nP_r = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times [n-(r-1)] \times (n-r) \times [n-(r+1)] \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-r) \times [n-(r+1)] \times \ldots \times 2 \times 1}$$

ومن ثم باستخدام صيغة المضروب نحصل على :

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ١٢ ـ ٦ ـ ١ : خلال فترة عمل معينة بتوقيع مراجع انهاء العمل فى أربع مجموعات حسابية ذات حجم خاص . فاذا كان لدية ثمانى مجموعات حسابية ، فكم متابعة مختلفة من أربع يمكنه العمل بها فى الفترة الأولى ؟

الاجابة : عدد المتابعات هو :

$$_8P_4 = \frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

تمرين ١٢ ـ ٦ ـ ١ : طالب عليه أن يجيب على ستة أسئلة من تسعة فى امتحان . كم متتابعة مختلفة مكونة من ستة يمكن أن تظهر فى ورقة إجابته ؟

فى دراسة التوافيق (أو الترتيبات كما تسمى أحيانا) نحن نفكر فى حالة تكوين فيها التنظيمات المختلفة لعناصر نفس المجموعة غير متميزة . والتوافيق تكون غالبا أكثر فائدة لنا عن التباديل .

أما فى نص المثال ١٢ـ٦ـ١ : فسوف يكون اهتمامنا معالجته بالتوافيق أكثر من التباديل اذا كان السؤال على صورة ، كم مجموعة مختلفة من الحسابات يمكن العمل بها فى الفترة الأولى ، وليس كم متتابعة مختلفة .

لنفترض أننا رمزنا للحسابات بالرموز $A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H$. وبالسؤال عن المتتابعات المكونة من أربع ، فان المتتابعات

$$B\ D\ F\ G$$
$$D\ B\ G\ F$$
$$B\ F\ G\ D$$
$$D\ G\ B\ F$$
$$F\ B\ D\ G$$

تكون جزءا من المجموع 1680 الذى حصلنا عليه . غير أن ، هذه المتتابعات مع باقى الترتيبات الأخرى تعتبر كمجموعة واحدة عناصرها مكونة من أربعة حسابات يمكن العمل بها . وبالمثل أى مجموعة أخرى مكونة من أربع حسابات تولد عددا من المتتابعات مساو لعدد الطرق التى يمكن بها ترتيبها فيما بينها .

أما بالنسبة لايجاد عدد المجموعات المختلفة التى يمكن العمل بها فيطلب منا أن نقسم العدد الكلى للمتتابعات على عدد المتتابعات التى تولد من كل مجموعة . وعليه فان العدد الذى ترتب بها العناصر الأربعة فيما بينها هى

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

ومن ثم فان عدد المجموعات المختلفة من الحسابات الأربعة التى يمكن العمل بها تكون $1680 / 24 = 70$.

وبوجه عام فعدد الطرق لاختيار r وحدة من بين n إذا كانت نفس المجموعة بتنظيمات مختلفة تحسب مرة واحدة فقط نحصل عليه بقسمة عدد الاختيارات ${}_nP_r$ على $r!$ وهو عدد الطرق التى ترتب بها كل فئة مكونة من r وحدة . وهذا يسمى بعدد التوافيق لـ r وحدة من n وحدة ويرمز لها بالرمز ${}_nC_r$ ونرى أن

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ١٢ ـ ٦ ـ ٢: طالب عليه أن يجيب على خمسة أسئلة من سبعة أسئلة فى إمتحان .
(أ) بكم طريقة يمكن اختيار اسئلته ؟
(ب) اذا كان عليه أن يجيب على السؤالين الأولين ، وبكم طريقة يمكن اختيار مجموعة مكونة من خمسة للاجابة عليها ؟
(جـ) بكم طريقة يمكن عمل اختياره اذا كان عليه أن يجيب على الأقل على ثلاثة اسئلة من الأربع أسئلة الأوائل ؟
(م م ت أ ـ الأساس ب ـ مايو ١٩٧٨)

الاجابة :

(أ) المعتبر هنا ، ليس كما فى التمرين السابق ، وهو كم مجموعة مختلفة من الأسئلة يمكن للطالب حلها . والتنظيم

الذى تظهر به الاجابات فى ورقة الاجابة ليس مهما وعليه فالحل يكون :

$$_7C_5 = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

(ب) فى هذه الحالة ، عليه اختيار ثلاثة أسئلة من الخمسة الأخيرة ، ومن ثم عدد المجموعات المختلفة التى يمكنه اختيارها تكون

$$_5C_3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(جـ) اذا قرر أن تجيب على ثلاثة أسئلة بالضبط من الأربعة الأولى يكون عدد طرق الاختيار هو

$$_4C_3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

إذن ، فعليه أن يختار سؤالين من الثلاثة المتبقية ، ويكون عدد طرق الاختيار هى

$$_3C_2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

وأى مجموعة من الأربعة الأولى يمكن دمجها مع أى مجموعة من الثلاث الأخيرة . ومن ثم فان عدد المجموعة المختلفة الكلية تكون $4 \times 3 = 12$. أما اذا قرر أن يجيب على الأسئلة الأربعة الأولى ، فسيكون اختياره فقط محصور فى اختيار سؤال من الثلاثة الأخيرة . ويكون عدد الطرق هو

$$_3C_1 = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

اذن العدد الكلى للفئات المختلفة التى يمكن للطالب اختياره للحل يكون $15 = 3 + 12$.

تمرين ١٢ ـ ٦ ـ ٢ : عشرة مكلفون للعمل بشركة وزعوا على قسمين ، بكم طريقة يمكن اجراء هذا اذا كان قسم X يستقبل ستة منهم ، وقسم Y يستقبل أربعة ؟

تمرين ١٢ ـ ٦ ـ ٣ : قررت شركة القيام باجراء مايتضمن تجميع معلومات عن ستة من أكبر عملائها الاثنى عشر . بكم طريقة يمكنها اختيار عينة عشوائية من ستة من مجموعة الاثنى عشر ؟

مثلث باسكال : قبل ترك التوافيق سنلقى نظرة على طريقة أخرى لحسابها . هذه الطريقة بسيطة جدا من حيث أنها لاتحوى حسابات سوى جمع لأزواج من الأعداد . ولاتستخدم هذه الطريقة اذا كان العدد الكلى للوحدات n يزيد على 10 الا إذا كان المطلوب ايجاد $_nC_r$ لنفس قيمة n .

وأسهل طريقة لكتابة مثلث باسكال هى كما يلى :

```
                  1     1
               1     2     1
            1     3     3     1
         1     4     6     4     1
      1     5    10    10     5     1
   1     6    15    20    15     6     1
1     7    21    35    35    21     7     1
```

وهكذا

كل صف فى المثلث نحصل عليه من الصف الذى يسبقه يجمع أزواج الأرقام المتجاورة ، وكتابته المجموع بينهما فى الصف الذى تحته . وللتأكيد من فهمك للقاعدة يمكنك تكوين الصفين التاليين . الصف التالى للصف الأخير يكون 1,8,28,56,70,56,28,8,1 .

ولايجاد $_nC_r$ نذهب إلى الصف n من المثلث ، ونأخذ العدد الذى على يساره r من الأعداد . دعنا نوجد الاعداد $_nC_r$ المتضمنة فى المثال السابق بهذه الطريقة

$_7C_5$ هو العدد فى الصف 7 والذى على يساره 5 أرقام . ويكون 21 .

$_5C_3$ هو العدد فى الصف 5 والذى على يسارة 3 اعداد . ويكون 10 .

$_3C_1$ هو العدد فى الصف 3 والذى على يساره عدد 1 . ويكون 3 .

$_3C_2$ هو العدد فى الصف 3 والذى على يساره 2 . من الأعداد ويكون 3 .

تمارين

١٢ ـ ١ شركة تدرس النتائج المتوقعة ، وهى تخطط لتسويق منتج جديد . وكجزء من دراستها قدرت إحتمالات دخول شركات أخرى منافسة فى السوق بمنتجات لها . وتعتقد أن إحتمال أن المنافس A يدخل السوق هو 60% والمنافس B هو 30% والمنافس C هو 10%

والمطلوب منك حساب الاحتمالات الاتية :

(١) لن يدخل السوق أى منافس .

(٢) A و C ولكن ليس B سوف يدخلان كمنافسين

(٣) سوف يكون هناك منافس واحد .

(م م ت أ ـ المهنى ١ ـ مايو ١٩٧٧)

١٢ ـ ٢ شركة تصنع وحدات باستخدام القيمة العظمى لثلاث عمليات مختلفة هى تشكيل وطلاء وصقل . ويمكن حدوث عيب للوحدة فى أثناء أى من هذه العمليات وهذا العيب يصنف أما ثانويا ، أو رئيسيا . والجدول التالى يعطى احتمالات حدوث عيب للوحدة فى أثناء كل من العمليات الثلاث ، التى تكون مستقلة .

عملية	لاعيوب	عيب واحد ثانوى	عيب واحد رئيسى
تشكيل	0.70	0.20	0.10
طلاء	0.70	0.10	0.20
صقل	0.65	0.20	0.15

المطلوب :

ماهو احتمال أن وحدة مرت بالعمليات الثلاث تحتوى على :

(١) لاعيوب ؟

(٢) عيب واحد ثانوى ، واثنان رئيسيان ؟

(٣) عيبان غير محددى النوع ؟

(ح م م ـ الأساس ب ـ يونيو ١٩٧٧)

١٢ ـ ٣ النتائج التالية تم الحصول عليها من سؤال 500 شخص بدلوا سياراتهم منذ وقت قريب ، والسيارات صنفت أما كبيرة ، أو متوسطة ، أو صغيرة الحجم تبعا لطولها .

حجم السيارة السابقة	حجم السيارة الحالية			
	كبيرة (> 15')	متوسطة (13'–15')	صغيرة (< 13')	المجموع
كبيرة	75	47	22	144
متوسطة	36	75	69	180
صغيرة	11	63	102	176
المجموع	122	185	193	500

المطلوب :

(١) ماهى نسبة الناس فى المسح الاحصائى الذين غيروا سياراتهم

(i) سيارة أصغر ؟

(ii) سيارة أكبر ؟

(٢) ماهو تأثير لمثل عادات تغيير السيارات عامة على حجم السيارة التى يرغب فى اقتنائها فى المستقبل ؟

(٣) ماهو احتمال أن شخصا ما أختير عشوائيا ، واشترى عربة كبيرة سابقا رغم أنه كان يمتلك عربة صغيرة ، أو متوسطة ؟ .

(ج م م ـ الأساس ب ـ يونيو ١٩٧٦)

١٢ ـ ٤ عملية تسليم وحدة لشركة من أحد الموردين يستغرق أسبوعا ، أو اسبوعين أو ثلاثة أسابيع من تاريخ الاتفاق . وفى المتوسط 20% من التسليمات يأخذ أسبوعا 50% تأخذ أسبوعين 30% يأخذ ثلاثة أسابيع . الشركة تستخدم اما وحدة ، أو وحدتين كل اسبوع باحتمالات 0.6 , 0.4 على التوالى . العدد المستخدم فى أسبوع واحد لايعتمد على العدد المستخدم فى الأسابيع السابقة .

المطلوب :

(١) (i) ماهو احتمال أن التسليم من المورد يأخذ اسبوعين ، أو أطول ؟

(ii) بشرط أن الشركة لم تستلم شيئا فى الأسبوع الأول بعد الاتفاق . احسب احتمال أنها سوف تستلم خلال الأسبوع الثانى ، وفسر أجابتك .

(iii) احسب احتمال أن الشركة تستخدم :

(أ) ثلاث وحدات فى أسبوعين ،

(ب) أربع وحدات فى أسبوعين .

(٢) اذا كانت الشركة لديها وحدتين مخزونتين عندما تم أمر التسليم احسب احتمال أن الشركة سوف لاتملك مخزونا كافيا يقابل الانتاج قبل وصول التسليم .

(جـ م م الاساس ب : يونيو ١٩٨٠)

الفصل الثالث عشر

تحليل نظرية القرارت

١٣ - ١ تكوين القرارات التى تتضمن شكا :

اتخاذ القرارات فى مجال الأعمال عملية بالغة التعقيد تتضمن تجميع كم كبير من المعلومات المختلفة الكيفية والكمية ، واستخدامها استخداما ذكيا . ولاشك أن البراعة فى هذا المجال تتطلب قدرا كبيرا من الخبرة فى كل نواحى الأعمال ، وبالتالى فان اعداد القارىء ليقوم باتخاذ القرارات بكفاءة يخرج عن نطاق هذا الكتاب . وقد وضعنا لأنفسنا هدفا أكثر تواضعا ، وهو تزويد القارىء بطريقة مفيدة للتفكير فى ماهية عملية اتخاذ القرارات وتعريفه ببعض الأساليب الشائعة للمعاونة فى حل تلك المسألة وخاصة فى مجال المال والاقتصاد .

ويمكن دراسة بنيان عملية اتخاذ القرارات من خلال العناصر الأربعة التالية :

(أ) الأهداف

أولا : يجب أن يكون واضحا لمتخذ القرار مايريد تحقيقه كنتيجة لقراره . وفى مجال المال والاقتصاد يكون الهدف عادة هو تحقيق أقصى ربح . ومع ذلك فليس هذا هو الهدف الوحيد الذى قد يكون لدى متخذ القرار . ومن أمثلة الأهداف الأخرى تحقيق اكبر نصيب فى السوق ، أو تحقيق أكبر دخل ممكن . وقد تتعارض هذه الأهداف فيما بينها . وعلى سبيل المثال فقد تجعلنا المنافع البعيدة المدى للحصول على نصيب كبير فى السوق نقبل بربح أقل على المدى القريب . ومن أهم جوانب عملية إتخاذ القرارات حل التناقضات من هذا النوع للوصول إلى أهداف واضحة .

(ب) الاستراتيجية

بعد أن وضعنا الأهداف تكون الخطوة التالية هى دراسة الوسائل التى يمكن اتباعها لتحقيق تلك الأهداف . وسنسمى الوسائل الممكنة لتحقيق الأهداف بالاستراتيجيات المتاحة . وقد تكون هذه الاستراتيجيات مجموعة من قرارات الاستثمار أو قد تكون قرارا بانتاج ، أو عدم انتاج منتج جديد أو إدخال ، أو عدم إدخال نظام جديد لأجور عمال الانتاج . ومن المهم التفكير جيدا فى كل الاستراتيجيات الممكنة فى موقف معين قبل اتخاذ قرار باختيار احداها .

(جـ) الشك

لو كان متخذ القرار يعلم عن يقين الظروف التى ستسود عند تنفيذ استراتيجيته المختارة لزال الجزء الأكبر من صعوبة عملية اتخاذ القرارات . ولو كنا نعلم جيدا المناخ الاقتصادى الذى سيسود فى المستقبل لأصبح من السهولة بمكان اتخاذ قرار بشأن الاستثمار فى معدات جديدة أو عدمه . وتهدف الكثرة الغالبة من التنبؤات الاقتصادية حاليا إلى معاونة الناس على اتخاذ القرارات . وبالمثل يسهل تحديد سعر أى منتج جديد لو كانت نوايا المنافسين معروفة . وتسمى الظروف المختلفة التى قد تسود « بحالات الطبيعة » وتستعمل كلمة « مخاطرة » بمعنى خاص فى هذا المقام . ويقال أن موقفا ما به مخاطرة ، وليس مجرد شك اذا أمكن تحديد احتمالات حالات الطبيعة المختلفة التى يمكن أن تسود . ويمكن الوصول الى تقدير لتلك الاحتمالات بواسطة الأبحاث الاحصائية للسوق أو تحليل أرقام المبيعات على سبيل المثال .

(د) الفوائد

لتقدير فعالية أو فائدة الاستراتيجيات المختلفة لتحقيق الأهداف فى ظل الشك القائم حول حالات الطبيعة يجب أن يكون لدينا مقياس لما تستطيع الاستراتيجية تحقيقه . وفى مجال المحاسبة فان هذا المقياس عادة مايكون ماليا . وسنتناول فى الأمثلة الواردة فى الكتاب تقييم الاستراتيجيات ماليا . ومع ذلك فهناك حالات قد لاتكون الأهداف فيها مالية ، وانما تكون متعلقة برضا العملاء ، أو صحة العاملين . وفى هذه الحالات يلزم قياس فائدة الاستراتيجية لتحقيق الأهداف بمقاييس غير مالية . وحتى لو كانت الفائدة مالية ، فان الوصول إلى رقم يعبر عن مدة فائدة الاستراتيجية ليس بالأمر السهل . ويصبح الأمر أعقد اذا كانت الفائدة غير مالية . وتعكس المقاييس المختلفة التى تفضل على اساسها احدى الاستراتيجيات على غيرها ـ وسنتناول فى أجزاء تالية من هذا الفصل ـ الطرق المختلفة الممكنة لقياس الفائدة .

١٣ ـ ٢ القيم المتوقعة

من الطرق الشائعة لقياس فائدة احدى الاستراتيجيات استخدام القيمة المالية المتوقعة لها ، ويرمز لها بالرمز المختصر EMV وسنركز اهتمامنا أساسا على هذه الطريقة . وقبل أن نناقش هذا المقياس ، وطريقة استخدامه فى مسائل اتخاذ القرارات سنتناول بصفة عامة فكرة القيمة المتوقعة ، وهى فكرة هامة فى حد ذاتها حيث أنها تستخدم فى مجالات عديدة وليس لمجرد اتخاذ القرارات .

لنعتبر تجربة لها عدة نتائج محتملة الحدوث ، وكل نتيجة ترتبط بها قيمة معينة لأحد المتغيرات . ومن الأمثلة البسيطة لمثل هذه التجربة القاء زهرة طاولة غير منحازة والمتغير هنا هو عدد النقط على وجه الزهرة العلوى .

وهناك ست نتائج محتملة لعدد النقط هى 6,5,4,3,2,1 وهنا قد نتساءل : اذا القيت الزهرة عددا لانهائيا من المرات ، فما هو متوسط عدد النقط التى سنحصل عليها لكل رمية ؟ وهذا هو ما نعنية بتعبير العدد « المتوقع » للنقط التى سنحصل عليها عند القاء الزهرة .

فاذا القيت الزهرة عددا لانهائيا من المرات فان نسبة الرميات التى ستعطى الأرقام 6,5,4,3,2,1 هى جميعا ⅙ . وطبقا للنظرية الكلاسيكية للاحتمالات فان هذه النسب هى احتمالات تلك القيم . وهكذا فان العدد المتوسط لرميات لانهائية

$$\frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = 3.5$$

أى أن العدد المتوقع للنقط التى نحصل عليها عند رمى الزهرة هو 3.5 . ولايهم أن هذا العدد لايمكن أن يظهر عند أية رمية . فهذا الرقم هو الوسط الذى نحصل عليه لعدد كبير من الرميات .

وتعرف القيمة المتوقعة لمتغير بصفة عامة كما يلى :

$$\text{القيمة المتوقعة} = \sum_{\text{كل نتائج التجربة}} (\text{القيمة المرتبطة}) \times (\text{احتمال النتيجة})$$

وهى القيمة المتوسطة التى سيأخذها المتغير المعنى بعد تكرار التجربة عددا كبيرا من المرات .

مثال ١٣ - ٢ - ١ : صممت ماكينة بسيطة من نوع « ماكينات الفاكهة » لتوضيح أفكار نظرية الاحتمالات للطلبة . ولهذه الماكينة ثلاثة شبابيك 3,2,1 وتظهر بكل شباك صورة نوع من الفاكهة : موزة أو تفاحة . ويتم ذلك بدوران عجلات داخل الماكينة بطريقة عشوائية ، وبكل عجلة خمس صور منها واحدة تمثل موزة ، والأربعة الباقية تمثل تفاحا . وتلعب هذه اللعبة بوضع ماركة فى الماكينة ، وبعد ادارة العجلات تعيد الماكينة الماركات حسب القواعد التالية :

عدد الماركات المعادة	نوع المكسب	الشباك 3	الشباك 2	الشباك 1
50	A	موزة	موزة	موزة
3	B	تفاحة	موزة	تفاحة
5	C	موزتان فى أى وضع		
لاشىء	خسارة	الأوضاع الأخرى		

(أ) احسب ما إذا كنت تتوقع أن تكسب على المدى البعيد .

(ب) احسب العدد الذى يجب أن تضبط عليه الماركات المعادة فى حالة المكسب A اذا كان المطلوب ألا يكون هناك مكسب ، أو خسارة على المدى البعيد .

(جـ م م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٨)

الاجابة

(أ) احتمال المكسب من النوع A هو $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$

واحتمال المكسب من النوع B هو $\frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{125}$

واحتمال المكسب من النوع C هو $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{12}{125}$

وهكذا ، فان العائد المتوقع لكل لعبة باستخدام صيغة القيمة المتوقعة المعطاة أعلاه هو

$$50 \times \frac{1}{125} + 3 \times \frac{16}{125} + 5 \times \frac{12}{125} = \frac{158}{125}$$

وهذه القيمة أكبر من المدفوع ، وهو ماركة واحدة ، ولذلك فاننا نتوقع أن نكسب على المدى البعيد .

(ب) لنفترض أننا ضبطنا المكسب للنوع A ليكون a ولكى لايكون لدينا مكسب أوخسارة على المدى البعيد ، فان

$$a \times \frac{1}{125} + 3 \times \frac{16}{125} + 5 \times \frac{12}{125} = 1$$

اذن $a + 108 = 125$ ومنها نوجد $a = 17$ أى أن ما تعيده الماكينة للمكسب من النوع A يجب أن يكون 17 ماركة .

تمرين ١٣ ـ ٢ ـ ١ : هناك عمليتان مستقلتان A و B تبدأن فى وقت واحد . وزمن العمليتين غير مؤكد حيث أن إحتمالات هذا الزمن كما يلى :

العملية B		العملية A	
الاحتمال	المدة (بالأيام)	الاحتمال	المدة (بالأيام)
0.1	1	0.5	2
0.2	2	0.3	3
0.5	3	0.2	4
0.2	4		

أوجد أى العمليتين A أو B لها زمن متوقع للانتهاء أقصر من الاخرى .

(جـ م ـ الأساس ب ـ ديسمبر ١٩٧٨)

ويمكن لمسائل اتخاذ القرارات التى تتضمن قرارا واحدا ، ويتم فيها اختيار أفضل استراتيجية على أساس أعلى قيمة مالية متوقعة (وتسمى أحيانا بقاعدة بابيز لاتخاذ القرارات) يمكن لها أن تحل بسهولة إذا وضعت فى شكل جدول . ونعتبر المثال التالى :

على مدير التسويق باحدى الشركات أن يقرر ما إذا كان توزيع منتجات الشركة على نطاق البلاد أكثر ربحا من توزيعها على نطاق اقليمى . وفيما يلى البيانات التى سيبنى عليها القرار :

	التوزيع الأقليمى		التوزيع الوطنى		
	احتمال تحقق مستوى الطلب	الربح الصافى (مليون £)	احتمال تحقق مستوى الطلب	الربح الصافى (مليون £)	مستوى الطلب
	0.50	2.5	0.50	4.0	عالى
	0.25	2.0	0.25	2.0	متوسط
	0.25	1.2	0.25	0.5	منخفض

(البيانات مأخوذة من م م ت أ ـ الجزء الرابع ـ ١٩٧٤)

ويسمى الجدول الوارد فى هذا السؤال ، والذى يوضح العائد المحتمل نتيجة لتنفيذ الاستراتيجيات فى ظل حالات الطبيعة المختلفة باسم « جدول العائد » . ويمكن توضيح الحل بالجدول التالى :

التوزيع PV	الربح الأقليمى V	التوزيع PV	الربح الوطنى V	الاحتمال P	مستوى الطلب
1.25	2.5	2.0	4.0	0.50	عالى
0.5	2.0	0.5	2.0	0.25	متوسط
0.3	1.2	0.125	0.5	0.25	منخفض
2.05		2.625			

ويتضح من الجدول أن الربح المتوقع فى حالة التوزيع الوطنى أكبر لذا فان القرار طبقا لقاعدة بابيز هو الاتجاه الى التوزيع الوطنى .

وبالنسبة لمثال صغير كهذا لم يكن هناك داع لانشاء جدول لأن القيم المتوقعة لكل من السياستين كان يمكن حسابها فى سطر واحد . ولكن بالنسبة لمسائل أكبر تكون هناك عادة عدة سياسات ممكنة ، وعندئذ يصبح الجدول مفيدا لاقتصاد الجهد ولنعتبر المثال التالى .

مثال ١٣ - ٢ - ٢ : يشترى مطعم كبير نوعا من الكعك من مخبز قريب كل يوم . وثمن كل كعكة 10 بنسات ، وتباع فى المطعم بمبلغ 15 بنسا . ولكن ما لايباع من الكعك حتى نهاية اليوم يرسل الى منفذ آخر للتوزيع يباع فيه بسعر 8 بنسات للواحدة . وفيما يلى التوزيع التكرارى النسبى لمبيعات المطعم (مأخوذا من تحليل بيانات المبيعات السابقة) .

التكرار النسبى	المبيعات اليومية للكعك بالمطعم بالدستة (الدستة = 12 قطعة)
0.01	30
0.09	31
0.16	32
0.25	33
0.30	34
0.11	35
0.08	36

والمطلوب :

تحديد أفضل كمية من الكعك يجب أن يشتريها المطعم يوميا لكى تصل أرباحه إلى أقصى حد .
(م م ت أ - المهنى ١ - مايو ١٩٧٦)

الاجابة : يمكن حل هذا المثال باستخدام الجدول الموضح فى ص ٢٢٩

وهناك ربح قدره 60 بنسا على كل دستة تباع فى المطعم ، وخسارة قدرها 24 بنسا على كل دستة لاتباع . وطبقا للجدول ، فان أفضل كمية يجب شراؤها لتحقيق أقصى ربح متوقع هى 34 دستة . وهذا يعطى ربحا قدره £19.66 يوميا فى المتوسط .

وطريقة الجدول مفيدة جدا لمسألة بهذه الدرجة من التعقيد . استعمل طريقة الجدول لحل التمرين التالى :

تمرين ١٣ - ٢ - ٢ : سنحت لصاحب محل لملابس الرجال فرصة شراء بدل رجالى خفيفة بسعر خاص هو £12 للبدلة اذا اشترى من الان لوطات الواحدة بها 20 بدلة . والسعر العادى لشراء البدلة هو £16 وسعر بيعها بالتجزئة هو £24 . ولكنه إذا اشترى أكثر من اللازم ، فسيضطر الى بيع الزيادة فى آخر الموسم الصيفى بسعر £10 للبدلة وهو سعر تصفية كل البضائع الباقية . أما إذا اشترى اقل من اللازم ، فانه يستطيع الاستمرار فى شراء احتياجاته الاضافية بالسعر المعتاد وهو £16 .

النتيجة	الاحتمال	شراء 30		شراء 31		شراء 32	
		القيمة	القيمة × الاحتمال	القيمة	القيمة × الاحتمال	القيمة	القيمة × الاحتمال
بيع 30	0.01	1800		1776	17.76	1752	17.52
بيع 31	0.09	1800		1860		1836	165.24
بيع 32	0.16	1800		1860		1920	
بيع 33	0.25	1800	1800	1860	1841.40	1920	
بيع 34	0.30	1800		1860		1920	1728.00
بيع 35	0.11	1800		1860		1920	
بيع 36	0.08	1800		1860		1920	
			1800		1859.16		1910.76

شراء 33		شراء 34		شراء 35		شراء 36	
القيمة	القيمة × الاحتمال	القيمة	القيمة × الاحتمال	القيمة	القيمة × الاحتمال	القيمة	القيمة × الاحتمال
1728	17.28	1704	17.04	1680	16.80	1656	16.56
1812	163.08	1788	160.92	1764	138.76	1740	156.60
1846	303.36	1872	299.52	1840	295.68	1824	291.84
1980		1956	489.66	1932	483.60	1908	477.60
1980	1465.20	2040		2016	604.80	1992	597.60
1980		2040	999.60	2100	399.00	2076	288.36
1980		2040		2100		2160	172.86
	1948.92		1966.08		1958.64		1946.76

وكان تقديره للطلب على البدل اذا بيعت بسعر £24 كما يلى :

الاحتمال	الطلب (بدلة)
0.2	20
0.4	40
0.3	60
0.1	80

والمطلوب :

حساب عدد البدل التى يجب أن يطلبها هذا التاجر

(م م ت أ ـ الجزء الرابع ـ نوفمبر ١٩٧٣)

١٣ ـ ٣ تحليل شجرة القرارات

هذه الطريقة تستخدم لاتخاذ القرارات على أساس نظرية بايز عندما يكون مطلوبا اتخاذ مجموعة من القرارات المتتابعة ، وليس مجرد قرار واحد ، كما فى الأمثلة الواردة بالبند ١٣ ـ ٢ ومع ذلك فسنبدأ بحل المثال الوارد بالبند ٢٣ ـ ٢ . بشأن المفاضلة بين التوزيع الوطنى والأقليمى لمنتجات الشركة لنوضح الرموز ، والنظام الأساسى للرسم البيانى الشجرى .

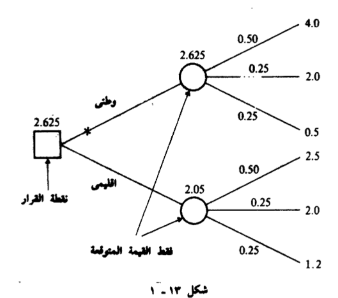
على مدير التسويق باحدى الشركات أن يفرز ما إذا كان توزيع منتجات الشركة على نطاق البلاد أكثر ربحا من توزيعها على نطاق اقليمى أضيق . وفيما يلى البيانات التى سيبنى عليها القرار

التوزيع الوطنى		التوزيع الاقليمى		
احتمال تحقق مستوى الطلب	الربحى الصافى (مليون £)	احتمال تحقق مستوى الطلب	الربحى الصافى (مليون £)	مستوى الطلب
0.50	2.5	0.50	4.0	عالى
0.25	2.0	0.25	2.0	متوسط
0.25	1.2	0.25	0.5	منخفض

(البيانات مأخوذة من م م ت أ ـ الجزء الرابع ـ مايو ١٩٧٤)

ويبين شكل (١٣ ـ ١) الرسم البيانى الشجرى لهذه المسألة . وفى هذا الرسم البيانى يمثل كل قرار يجب اتخاذه بمربع . وفى هذا المثال البسيط لايوجد الا قرار واحد وهو التوزيع على نطاق وطنى أو إقليمى . ويمثل هذا القرار بالمربع المعنون « نقطة القرار » بشكل ١٣ ـ ١ ويخرج من تلك النقطة خط يمثل كل استراتيجية يمكن اتباعها .

ويمثل الشك فى القرار بدوائر على شجرة القرار . وقد وضع على تلك الدوائر فى شكل ١٣ ـ ١ عنوان هو « نقط القيمة المتوقعة » ويخرج من كل نقطة قيمة متوقعة خط واحد لكل حالة من حالات الطبيعة التى يمكن أن تسود ، وقد كتب على كل خط احتمال حالة الطبيعة التى يمثلها .



شكل ١٣ ـ ١

وفى الرسومات الشجرية الأكثر تعقيدا تتصل المربعات ، والدوائر بخطوط بمختلف الأشكال كما سنرى فى المثال ١٣ ـ ٣ ـ ١ . وفى النهاية يجب أن تؤخذ فى الاعتبار كل القرارات والشكوك ، وأن تكون لدينا على الجانب الأيسر من الرسم خطوط ليس على اطرافها شيء . ويكتب على أطراف تلك الخطوط قيمة النتيجة المقابلة للقرارات المتتابعة المختلفة ولحالات الطبيعة المؤدية للنقطة المعنية . وفى شكل ١٣ ـ ١ فان هذه النتائج هى الأرباح المقابلة لقرارين (التوزيع الوطنى ، والأقليمى) فى ظل ثلاث حالات للطبيعة (الطلب العالى ، والمتوسط ، والمنخفض) . ويتطلب حل المسائل تناول الرسم البيانى من اليمين الى اليسار . ونكتب أمام كل « نقطة قيمة متوقعة » القيمة التى حصلنا عليها باستخدام الاحتمالات المكتوبة على الخطوط الخارجة من تلك النقطة ، والقيم المكتوبة على أطراف الخطوط . ونكتب أمام كل « نقطة قرار » أفضل قيمة مالية متوقعة EMV يمكن الحصول عليها بالسير على أحد الخطوط الخارجة من نقطة القرار ، ونضع علامة نجمة * على الخط المعنى .

وبالنسبة لمثالنا فى شكل ١٣ ـ ١ فان القيم المتوقعة هى 2.05 و 2.625 وأكبر هاتين القيمتين هى 2.625 ولذلك فان القرار يكون التوزيع على نطاق وطنى مما يعطى EMV مقدارها £2.625 .

وسنتناول الان مثالا به عدة قرارات مرتبطة فيما بينها بطرق مختلفة .

مثال ١٣ ـ ٣ ـ ١ : تفكر شركة فى طرق تطوير العملية الانتاجية لزيادة طاقتها لمواجهة زيادة متوقعة فى الطلب على انتاجها من مادة صناعية أساسية . وبعد دفع التكاليف الجارية للتشغيل تتوقع الشركة تحقيق ربح صاف مقداره 000 20£ فى الفترة من العملية الأنتاجية القائمة عند عملها بكامل طاقتها .

وكل البيانات المعطاه منسوبة لنفس الفترة

وقد أعد مدير البحوث والتطوير قائمة بالاجراءات التى يمكن اتخاذها كمايلى :

(أ) استخدام عملية انتاجية طورتها شركة أخرى تنتج منتجات مشابهة : وسيكلف هذه £7000 مقابل حق استخدام العملية ويعطى ربحا صافيا قدره 000 30£ (قبل دفع حقوق الاستخدام) .

(ب) اجراء برنامج أو برنامجين للبحث :

(i) البرنامج الأول أكثر تكلفة إذ يكلف 000 15£ لاجرائه ، ولكن ينتظر أن تكون فرصة نجاحه 0.8 وفى تلك الحالة

ستكون الأرباح الصافية 000 40 £ (قبل دفع تكاليف البحث) كما ينتظر الحصول على دخل إضافى قدره 8000£ مقابل بيع حق الاستخدام للاخرين .

(ii) برنامج آخر للبحث أقل تكلفة اذ يكلف 000 12 لاجرائه ، ولاينتظر أن تكون فرصة نجاحه أكثر من 0.5 والربح الصافى الناتج عنه نفس المذكور للبرنامج (i)

(يلاحظ أن فشل احد برنامجى الأبحاث لايقفل الطريق أمام الاجراءات الأخرى بما فيها البحث الثانى) .

(جـ) الاستمرار فى تشغيل المصنع الحالى دون توسع لمواجهة الزيادة فى الطلب .

والمطلوب تعميم المقترحات المذكورة لتحديد أكثر الاجراءات ربحية .

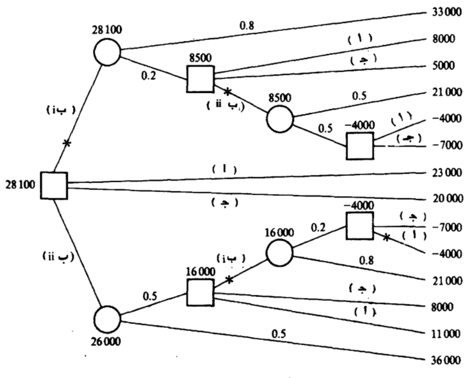
(م م ت أ - الجزء الرابع - مايو ١٩٧٥)

الاجابة : يبين شكل ١٣ - ٢ شجرة القرارة لهذا المثال .

وتبين الشجرة كل القرارات المتابعة التى يمكن أن تتخذ ، وفى نهاية كل تتابع بينا الربح النهائى الذى نحصل عليه فى حالة اتخاذ القرار ، وحدوث حالة الطبيعة المبينة وتبين الخطوط الخارجة من نقط القرار القرارات التى يمكن أن تتخذ ، وتبين الخطوط الخارجة من نقط القيمة المتوقعة احتمالات حالات الطبيعة أى نجاح ، أو فشل مشاريع البحث المعنية .

وقد تمت معالجة الشجرة من اليمين الى اليسار ، كما بيننا فيما سبق وخرجنا بنتيجة هى أنه يمكن الحصول على ربح متوقع أقصى هو 100 28£ . ونصل لهذه النتيجة باتباع الاجراءات التالية :

حاول أولا برنامج البحث رقم (ب i)



شكل ١٢ - ٢

فاذا فشل هذا البرنامج حاول برنامج البحث (ب ii)
فاذا فشل البرنامج الثانى استخدم عملية الشركة الأخرى (أ)

وفى نهاية هذا الجزء سنتناول مثالا بسيطا نسبيا بشأن استثمارين متتابعين .
مثال ١٣ ـ ٣ ـ ٢ : المطلوب استخدام البيانات المذكورة أدناه لما يلى :
(أ) رسم شجرة القرار لتوضيح العلاقات بين مجموعتى النتائج .
(ب) حساب القيمة المالية الصافية المتوقعة نتيجة للاستثمارين .

وبالجدول التالى الاحتمالات المرتبطة بثلاث نتائج ممكنة للاستثمارين . وتتعلق النتائج بمجموعة من الأحداث المستقلة المتنافية :

التنائج الصافية للاستثمار Y (£)	التنائج الصافية للاستثمار X (£)			
	0	2000	4000	
0	0.04	0.12	0.04	0.20
2000	0.12	0.36	0.12	0.60
4000	0.04	0.12	0.04	0.20
	0.20	0.60	0.20	

(م م ت أ ـ الجزء الرابع ـ نوفمبر ١٩٧٢)

الاجابة : يبين شكل ١٣ ـ ٣ شجرة القرار لهذا المثال . ويوضح هذا المثال أنه قد لايكون هناك استراتيجية واحدة مفضلة . ولايؤثر ترتيب القيام بالاستثمارات على القيمة المالية المتوقعة EMV والقيمة المالية الصافية المتوقعة هى £4000 .

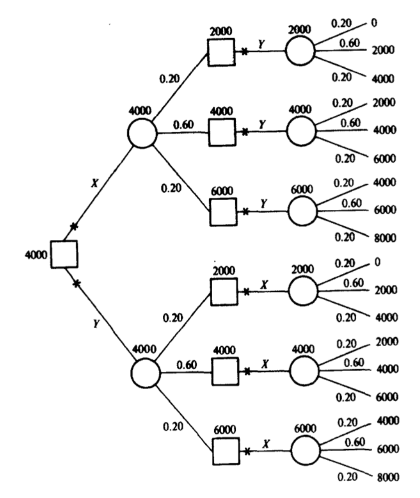
تمرين ١٣ ـ ٣ ـ ١ : شركة لديها 000 50£ متاحة للاستثمار . وتفكر الشركة فى مشروعين للاستثمار المشروع X وله احتمالات متساوية فى أن يدر ربحا قدره 6000£ أو خسارة قدرها 2500£ والمشروع Y وله احتمالات متساوية فى أن يدر ربحا قدره 9000£ ، أو خسارة 6000£ ويتطلب كل من المشروعين استثمارات أولية قدرها 000 25£ .

(١) احسب الربح المتوقع فى حالة القيام بالمشروعين معا .
(٢) لو كان المتاح للاستثمار فورا مبلغ 000 25£ فقط ولكن الأصل مضافا إليه الربح أو مطروحا منه الخسارة سيكون جاهزا بعد شهر من البدء فى أحد المشروعين . ويمكن عندئذ استثمار هذا المبلغ فى المشروع الثانى ، مع إهمال الفوائد على المبالغ غير المستقلة الباقية . ماهو أفضل اجراء تتخذه الشركة ، وماهى النتيجة المالية ؟
(م م ت أ ـ الجزء الرابع ـ مايو ١٩٧٥)

١٣ ـ ٤ ضياع الفرصة

يمكن بدلا من اعتبار العائد الناتج عن إختيار استراتيجية معينة عندما تسود حالة طبيعية معينة أن نعتبر الفرصة الضائعة الناتجة عن هذا الاختيار . وهذه الفرصة هى الفرق بين العائد المحقق ، وذلك الذى كان يمكن تحقيقه لو استخدمنا الاستراتيجية التى تعطى أفضل عائد لحالة الطبيعة تلك .

اعتبر البيانات بعائد التوزيع الوطنى ، والاقليمى فى حالة الطلب العالى ، والمتوسط والمنخفض .



شكل ١٣ ـ ٣

الطلب	العائد من التوزيع الاقليمى (مليون £)	العائد من التوزيع الوطنى (مليون £)
عالى	4.0	2.5
متوسط	2.0	2.0
منخفض	0.5	1.2

(البيانات مأخوذة من م م ت أ ـ الجزء الرابع ـ مايو ١٩٧٤)

فاذا تقرر التوزيع على النطاق الوطنى ، وكان الطلب عاليا ، فان أفضل نتيجة ممكنة فى ظل حالة الطلب العالى ستتحقق ، وهذا يعنى أن الفرصة الضائعة صفر . وكذلك اذا كان الطلب متوسطا ، فان التوزيع على النطاق الوطنى يعطى فرصة ضائعة تساوى صفرا . ولكن اذا كان الطلب منخفضا ، فان التوزيع على النطاق الوطنى يعطى عائدا قدره £0.5m فقط فى حين أن التوزيع على النطاق الاقليمى كان سيعطى £1.2m . وهكذا فان التوزيع على النطاق الوطنى يؤدى إلى فرصة ضائعة قدرها £0.7m . وفى حالة الطلب المتوسط أو المنخفض فان استراتيجية التوزيع الأقليمى تعطى فرصة ضائعة تساوى صفرا . فى حين أنه فى حالة الطلب العالى تكون هناك فرصة ضائعة مقدارها :

. £4.0m — £2.5m = £1.5m

وهكذا يكون جدول الفرصة الضائعة لهذا المثال كما هو مبين فيما يلى :

الطلب	الفرصة الضائعة فى التوزيع الوطنى (مليون £)	الفرصة الضائعة فى التوزيع الاقليمى . (مليون £)
عالى	0	1.5
متوسط	0	0
منخفض	0.7	0

وبصفة عامة نرى أن الفرصة الضائعة يمكن إيجادها من جدول العائد بطرح كل الأرقام الواردة فى أحد الصفوف من أكبر الأرقام فى الصف .

وبعد إيجاد الفرص الضائعة يمكن استخدامها بنفس الطريقة التى تستخدم بها العوائد نفسها . وبصفة خاصة يمكن استخدام قاعدة بايز مع الفرصة الضائعة بحساب الفرصة الضائعة المتوقعة المرتبطة بكل استراتيجية ، وبالتالى اختيار الاستراتيجية التى تعطى أقل فرصة ضائعة متوقعة . ويمكن بسهولة اثبات أن الاستراتيجية التى تعطى أقل فرصة ضائعة متوقعة هى نفسها الاستراتيجية التى تعطى أقصى عوائد متوقعة . وهكذا فان قاعدة بايز للقرارات تنطبق على العوائد أو الفرصة الضائعة معطية نفس النتيجة . أما بالنسبة للمقاييس الأخرى للقرارات التى سنتناولها فى البند ١٣ ـ ٦ فان استخدام الفوائد ، أو الفرصة الضائعة يؤدى عامة الى تبنى استراتيجيات مختلفة .

وكمثال لحساب الفرصة الضائعة نأخذ حل المسألة السابقة على شكل جدول بعد ادخال احتمالات الحالات الطبيعية المختلفة

الطلب	الاحتمال P	الفرصة الضائعة فى التوزيع الوطنى V_1 (مليون £)	pV	الفرصة الضائعة فى التوزيع الاقليمى V_2 (مليون £)	pV
عالى	0.50	0	0	1.5	0.75
متوسط	0.25	0	0	0	0
منخفض	0.25	0.7	0.175	0	0
			0.175		0.75

والفرصة الضائعة الأقل هى تلك المرتبطة بالتوزيع الوطنى ، وبذلك فان قاعدة بايز للقرارات تقول باتباع هذه الاستراتيجية .

وفى نهاية هذا الجزء سنتناول مثالا آخر لحساب الفرصة الضائعة المتوقعة .

مثال ١٣ ـ ٤ ـ ١ : تفكر شركة فى شراء معدات لانتاج اجزاء لازمة لبرنامج تنمية البترول فى بحر الشمال . وهناك ثلاثة أنواع من المعدات التى يمكن شراؤها .

(١) معدات تقليدية ـ تشغيل يدوى .
(٢) معدات ذات تحكم رقمى .
(٣) معدات ذات تحكم رقمى بواسطة الكومبيوتر .

وتزداد التكاليف الاستثمارية اذا انتقلنا من النوع (١) الى (٢) ثم (٣) ويتوقف العائد من أى سيارة تتبع على حجم السوق الذى ستورد اليه الأجزاء ، وهو أمر غير مؤكد حاليا . وقد تم تقسيم السوق الى ثلاثة مستويات عامة : ضعيف ، متوسط ، وجيد . ويبين الجدول التالى الأرباح (أو الخسائر وهى موضحة بعلامة ناقص) حسب حالة السوق ونوع الماكينات :

السوق	رقمى بالكومبيوتر	رقمى	تقليدى
	الأرباح (مليون £)		
ضعيف	0.5	0	−1.5
متوسط	1.0	1.5	0.5
جيد	1.5	2.5	3.5

وقد قدرت احتمالات أن تكون السوق ضعيفة ، أومتوسطة ، أو جيدة بالقيم 30% أو 50% أو 20% على الترتيب وفقا لتقديرات ادارة الشركة .

احسب الفرصة الضائعة المتوقعة لكل نوع من المعدات ، ثم استخدم قاعدة بايز للقرار لتحديد النوع الذى يجب شراؤه .

(م م ت أ ـ المهنى ـ نوفمبر ١٩٧٧)

الاجابة : يمكن ترتيب خطوات الحل فى الجدول التالى الذى يبين الفرصة الضائعة ، واحتمالات الحالات الثلاث للطبيعة ، وحساب القيم المتوقعة .

السوق	الاحتمال ، P	الفرصة الضائعة V (مليون £)	pV	الفرصة الضائعة V (مليون £)	pV	الفرصة الضائعة V (مليون £)	pV
ضعيف	0.3	0	0	0.5	0.15	2	0.60
متوسط	0.5	0.5	0.25	0	0	1	0.50
جيد	0.2	2	0.40	1	0.20	0	0
			0.65		0.35		1.10

وأصغر فرصة ضائعة متوقعة هى تلك المرتبطة بالمعدات ذات التحكم الرقمى ، ولذلك يلزم شراء هذا النوع .

وسنعود مرة أخرى الى الفرصة الضائعة فى البند ١٣ ـ ٦ عندما نناقش المقاييس الأخرى للاختياربين الاستراتيجيات المختلفة .

تمرين ١٣ ـ ٤ ـ ١ : يقوم تاجر تجزئة بشراء باقات من الزهور فى الصباح الباكر من السوق بسعر 10 بنسات للواحدة . وينوى بيعها بسعر 25 بنسا للواحدة . ولايخفض التاجر اسعاره طوال النهار ، ولكنه يعطى ما يتبقى من الزهور دون بيع فى المساء للمستشفى المحلى . ويمكن للتاجر أن يشترى كل صباح الأعداد التالية من الباقات 100 ,200 ,300 و 400 .

ويقدر التاجر الطلب على الباقات يوميا كما يلى :

عدد الباقات	الاحتمال
0	0.05
100	0.20
200	0.40
300	0.25
400	0.10

احسب الفرصة الضائعة المتوقعة حسب السياسات الممكنة للشراء ، ثم حدد عدد الباقات التى يجب أن يشتريها التاجر يوميا حتى يحصل على أقصى ربح فى المدى الطويل .

(م م ت أ ـ الجزء الرابع ـ يونيو ١٩٧٧)

١٣ ـ ٥ المعلومات الكاملة

لو كان متخذ القرار يعلم بالضبط أى حالات الطبيعة ستسود لاستطاع أن يتجنب الفرصة الضائعة تماما . وفى تلك الحالة سيختار الاستراتيجية التى تعطى أفضل عائد فى ظل تلك الحالة من حالات الطبيعة . ولو كان ممكنا الحصول على معلومات كاملة عن حالة الطبيعة لزال الشك تماما ، وانتهت مشاكل متخذ القرارات . ولكن هذا غير ممكن مع الأسف ، ومع ذلك ، فمن المفيد أن نفكر بعض الشىء فى مسألة المعلومات الكاملة . ومن الممكن تقليل الشك المتعلق بحالات الطبيعة باجراء أبحاث السوق أو غيرها من طرق البحث حتى لو تكلفت بعض المال . ولو عرفنا مدى تحسن موقف متخذ القرار اذا حصل على المعلومات الكاملة لأمكن أن نضع حدا أعلى لما يمكن صرفه للحصول على المعلومات . وهكذا ، فمن المفيد أن نحسب قيمة المعلومات الكاملة . وهذا المبلغ هو أقصى ما يمكن أن يستحق أن يدفع لتحسين معلوماتنا (دون أن تصبح كاملة) عن حالات الطبيعة .

وتحسب قيمة المعلومات الكاملة بايجاد العائد المتوقع الحصول عليه لو كانت لدينا معلومات كاملة ، ويطرح منه العائد المتوقع عند استعمال الاستراتيجية الأفضل فى ظل غياب المعلومات الكاملة .

سنتناول مرة أخرى نتائج من التوزيع الوطنى والأقليمى لمنتجات أحدى الشركات

مستوى الطلب	التوزيع الوطنى: الربح الصافى (مليون £)	التوزيع الوطنى: احتمال تحقق مستوى الطلب	التوزيع الأقليمى: الربح الصافى (مليون £)	التوزيع الأقليمى: احتمال تحقق مستوى الطلب
عالي	4.0	0.50	2.5	0.50
متوسط	2.0	0.25	2.0	0.25
منخفض	0.5	0.25	1.2	0.25

(البيانات مأخوذة من م م ت أ ـ الجزء الرابع ـ مايو ١٩٧٤)

وقد رأينا فى البند ١٣ ـ ٢ أن السياسة التى تعطى أعلى قيمة مالية متوقعة هى التوزيع الوطنى ، وأن الربح المتوقع فى هذه الحالة هو £2.625m .

ولو كانت لدينا معلومات كاملة تدل على أن مستوى الطلب سيكون عاليا لقررنا اتباع سياسة التوزيع الوطنى ، وحصلنا على ربح قدره £4.0m واحتمال حدوث ذلك هو 0.5 .

ولو كانت لدينا معلومات كاملة تدل على أن مستوى الطلب سيكون متوسطا لقررنا اختيار أى من طريقتى التوزيع ، وحصلنا على ربح قدره £2.0m واحتمال حدوث ذلك هو 0.25 .

ولو كانت لدينا معلومات كاملة تدل على أن مستوى الطلب سيكون منخفضا لاتبعنا التوزيع الاقليمى ، وحصلنا على ربح قدره £1.2m . واحتمال حدوث ذلك هو 0.25 .

وهكذا ، فان الربح المتوقع لو كانت لدينا معلومات كاملة هو

$$£(4.0 \times 0.5 + 2.0 \times 0.25 + 1.2 \times 0.25)m = £(2 + 0.5 + 0.3)m = £2.8m$$

وهكذا فان التحسن الناتج عن حصولنا على المعلومات الكاملة هو £2.8m — £2.625m = £0.175m وهذه هى قيمة المعلومات الكاملة . وتساوى كذلك الفرصة الضائعة المتوقعة عند استخدام أفضل استراتيجية فى غياب المعلومات الكاملة . وكنا قد أوجدنا الفرصة الضائعة المتوقعة عند التوزيع الوطنى فى البند ١٣ ـ ٤ وكانت تساوى £0.175m .

وباستعمال هذه الحقيقة نجد أن قيمة المعلومات الكاملة عن السوق فى مثال معدلات تنمية بترول بحر الشمال بالبند ١٣ ـ ٤ هى £0.35m وتمكننا المعلومات الكاملة من الغاء الفرصة الضائعة المتوقعة مع أفضل استراتيجية .

وفى نهاية هذا الجزء سنتناول مثالا يستخدم نفس البيانات الخاصة بمبيعات الكعك فى أحد المطاعم الذى درسناه قبلا فى البند ١٣ ـ ٢ .

مثال ١٣ ـ ٥ ـ ١ يشترى مطعم كبير نوعا من الكعك من مخبز قريب كل يوم وثمن كل كعكة 10 بنسات وتباع فى المطعم بمبلغ 15 بنسا . ولكن مالايباع من الكعك حتى نهاية اليوم يرسل الى منفذ آخر للتوزيع يباع فيه بسعر 8 بنسات للواحدة . وفيما يلى التوزيع التكرارى النسبى لمبيعات المطعم (مأخوذا من تحليل بيانات المبيعات السابقة)

المبيعات اليومية للكعك بالمطعم (بالدستة) (الدستة = 12 كعكة)	التكرار النسبى
30	0.01
31	0.09
32	0.16
33	0.25
34	0.30
35	0.11
36	0.08

والمطلوب :

ايجاد مايمكن للمطعم أن ينفقه للحصول على معلومات صحيحة تماما عن المبيعات اليومية .
(م م ت أ ـ المهنى ١ ـ مايو ١٩٧٦)

الاجابة : أوجدنا فى الجزء ١٣ ـ ٢ أن أفضل سياسة فى غياب المعلومات الكاملة هى شراء 34 دستة يوميا مما يعطى ربحا يوميا متوقعا قدره £19.66 ولو كان لدى المطعم معلومات كاملة لاشترى كل يوم عدد الكعك بالضبط الذى يعلم أنه سيباع فى ذلك اليوم ، وبالتالى فإنه لن يضطر لبيع أى من الكعك بخسارة 2 بنس .

وربح المعطم فى كل دستة تباع به هو £0.6 = 60 p = (15 — 10) × 12وهكذا فإن الربح اليومى المتوقع مع توفر المعلومات الكاملة هو

$$\begin{aligned} &£0.6 \times (30 \times 0.01 + 31 \times 0.09 + 32 \times 0.16 + 33 \times 0.25 + 34 \times 0.30 + 35 \times 0.11 \\ &+ 36 \times 0.08) = £0.6 \times (0.30 + 2.79 + 5.12 + 8.25 + 10.20 + 3.85 + 2.88) \\ &= £0.6 \times 33.39 = £20.034 \end{aligned}$$

ومنها نوجد التحسن فى الربح اليومى المتوقع بفضل توفر المعلومات الكاملة ، ويساوى £20.03 — £19.66 = 37p .
وبالتالى فإن أقصى مايمكن للمطعم انفاقه للحصول على المعلومات الكاملة عن المبيعات اليومية هو 37 بنسا .

تمرين ١٣ ـ ٥ ـ ١ : طلب أحد النوادى المحلية مشورتك بشأن عدد البرامج التى تطبع لكل مباراة كرة قدم . وكانت تكاليف طبع وانتاج البرامج لكل مباراة حسب العرض الذى تقدمت به مطبعة محلية هى £1000 زائد 4 بنسات لكل نسخة . ويمثل دخل الاعلانات الذى تم الاتفاق عليه عن الموسم £800 لكل مباراة .

وتباع البرامج بمبلغ 15 بنسا لكل برنامج . وقد أظهرت دراسة المبيعات فى المواسم السابقة أنه ينتظر أن تتكرر العلاقة التالية بين عدد البرامج المبيعة ، وعدد المباريات خلال الموسم القادم الذى سيتضمن 50 مباراة .

عدد المباريات	عدد البرامج المباعة
5	10 000
20	20 000
15	30 000
10	40 000

وتباع البرامج التى لاتباع فى المباراة كنفاية ورقية لمصنع للورق بسعر بنس واحد للنسخة .

ويفرض أن الكميات الأربع المذكورة أعلاه هى الامكانات الوحيدة مطلوب :

(أ) اعداد جداول العائد .

(ب) تحديد عدد البرامج التى تحقق اعلى ربح إذا كان نفس العدد من البرامج سيطبع لكل مباراة .

(جـ) حساب الربح الذى ينتج من تنبؤ صحيح بعدد البرامج التى ستباع فى كل مباراة ، وبالتالى تحديد قيمة مثل هذا التنبؤ الصحيح .

(م م ت أ ـ المهنى ١ ـ مايو ١٩٧٩)

١٣ ـ ٦ معايير أخرى للأختيار

تتعلق قاعدة بايز للقرارات التى تستخدم القيمة المالية المتوقعة ، أو الفرصة الضائعة المتوقعة بالعائد المتوسط الذى تعطيه استراتيجية ما لو طبقت بفرض تكرار الموقف المبحوث عددا كبيرا من المرات . وهذا المدخل منطقى ، ولذلك فان نظرية بايز هى أكثر المقاييس المستخدمة شيوعا لاختيار الاستراتيجيات . ولكن عيب هذه النظرية هى أنها فى موقف معين قد تؤدى الى قرار مدمر . وبالنسبة لمؤسسة كبيرة فان كارثة كهذه لن تسبب ضررا كبيرا كما أن التطبيق المستمر لقاعدة بايز يمكن أن يؤدى إلى نتائج أفضل من المتوقع عددا كافيا من المرات بحيث تعوض أثر النتائج الأسوأ من المتوقع . أما بالنسبة لشركة صغيرة ، فان قرارا خاطئا واحدا يمكن أن يؤدى إلى كارثة ، ولذلك يفضل استخدام طريقة تضمن عدم حدوث الكوارث حتى ولو كان الربح المتوقع منها أقل مما تعطيه قاعدة بايز . وهذه هى الفكرة وراء معيار بسيط للقرار يسمى مبدأ الحد الأعلى ـ الأدنى .

ولتوضيح مبدأ الحد الأعلى ـ الأدنى سنتناول مرة أخرى بجدول العائد من التوزيع الوطنى والاقليمى لمنتجات احدى الشركات .

العائد من التوزيع الاقليمى (مليون £)	العائد من التوزيع الوطنى (مليون £)	الطلب
2.5	4.0	عالى
2.0	2.0	متوسط
1.2	0.5	منخفض

(البيانات مأخوذة من م م ت أ ـ الجزء الرابع ـ مايو ١٩٧٤)

وقد أوجدنا عدة مرات أن التوزيع الوطنى يعطى أكبر ربح متوقع . ومع ذلك فاننا لو قررنا التوزيع الوطنى ، وجاء الطلب منخفضا ، فان الربح سيكون £0.5m فقط . أما لو قررنا التوزيع الاقليمى ، فان أسوأ مايمكن أن يحدث هو مكسب قدره £1.2m (حتى عندما يكون الطلب منخفضا) . وهكذا فان مبدأ الحد الأعلى ـ الأدنى يدعونا لتبنى سياسة التوزيع الاقليمى لأنها تجعل العائد يصل إلى حد أعلى اذا كانت حالة الطبيعة بحيث تجعل الربح يصل إلى حد أدنى عند تطبيق الاستراتيجية التى اخترناها . والواقع أن مبدأ الحد الأعلى ـ الأدنى مبدأ متشائم فى اتخاذ القرارات لأنه يهتم بالحالة التى تلحق بنا الطبيعة معها أكبر ضرر فى ظل الاستراتيجية المختارة . وبصفة عامة ، فان قاعدة الحد الأعلى ـ الأدنى توجد الحد الأدنى فى كل عمود ، ثم تختار العمود الذى به أكبر حد أدنى . وقاعدة الحد الأعلى ـ الأدنى هى أكثر قواعد اتخاذ القرارات التى سنتناولها فى هذا الجزء استخداما ، ولكنها أقل أهمية من قاعدة بايز للقرارات .

والمدخل العكسى لذلك الموجود فى قاعدة الحد الأعلى ـ الأدنى هو فى قاعدة الحد الأعلى ـ الأعلى . وفى هذه الحالة ، فان متخذ القرار يبدو كشخص متفائل (أو مغامر) يهتم بأفضل نتيجة يمكن أن تحدث بفضل اختياره لاستراتيجية ما . وربما كان ذلك لأنه يعتقد أن الطبيعة ستكون رحيمة نحوه وربما لأن أفضل نتيجة فقط هى التى تهمه وهو على استعداد للمقامرة على أمل تحقيقها . وبالنسبة للمثال الذى نبحثه ، فان أفضل نتيجة ممكنة للتوزيع الوطنى هى £4.0m عندما يكون الطلب عاليا . وأفضل نتيجة ممكنة للتوزيع الأقليمى هى £2.5m أيضا عندما يكون الطلبَ عاليا . وتقول قاعدة الحد الأعلى ـ الأعلى بالأخذ بالتوزيع الوطنى لأنه يجعل العائد يصل إلى حد أعلى اذا كانت الطبيعة بحالة تجعل الربح فى ظل الأستراتيجية المختارة يصل إلى حد الاعلى . والعمل بقاعدة الحد الأعلى ـ الأعلى يعنى ايجاد أكبر عائد فى الجدول واختيار الاستراتيجية المقابلة للعمود الذى توجد به أكبر قيمة .

وفى النهاية سنعود إلى فكرة الفرصة الضائعة ونبحث معيارا لاتخاذ القرارات لها نفس طابع المعيارين المبحوثين أعلاه . ونعتبر مرة أخرى جدول الفرصة الضائعة المستنبط فى البند ١٣ ـ ٤ لمثالنا .

الطلب	الفرصة الضائعة فى التوزيع الوطنى (مليون £)	الفرصة الضائعة فى التوزيع الاقليمى (مليون £
متوسط	0	1.5
عالى	0	0
منخفض	0.7	0

وباستخدام هذا الجدول يمكن أن نقول أن التوزيع الوطنى أفضل لأن أكبر فرصة ضائعة فيه هى £0.7m فى حين أن التوزيع الاقليمى قد تكون به فرصة ضائعة مقدارها £1.5m وهذا مثال لتطبيق قاعدة الحد الادنى ـ الأعلى على الفرصة الضائعة اذ نوجد أقصى فرصة ضائعة يمكن أن تحدث فى ظل كل استراتيجية ، ثم تختار الاستراتيجية التى يكون فيها هذا الحد الأعلى أصغر مايمكن . أى أننا نجعل الحد الأعلى للفرصة الضائعة يصل الى حد أدنى . والفكرة العامة هى بايجاد أقصى قيمة فى كل عمود من جدول الفرصة الضائعة ، ثم اختيار الاستراتيجية المقابلة للعمود المحتوى على أصغر أقصى قيمة .

ونلاحظ أن المقاييس الثلاثة المبحوثة فى هذا الجزء تستخدم احتمالات حدوث الحالات الثلاث للطبيعة . ولذلك فهى مقاييس يمكن استخدامها فى حالات الشك الحقيقية وليس المخاطرة التى لاتكون فيها الاحتمالات معلومة . ولكن فى العادة يكون لدينا بعض المعلومات بشأن احتمالات حدوث حالات الطبيعة المختلفة حتى ولو كانت تقريبية جدا . وهذه النقطة تؤخذ ضد هذه المقاييس باعتبار أنها تضيع تلك المعلومات .

تمرين ١٣ ـ ٦ ـ ١ : تفكر شركة « زيتا للصناعات ليمتد » فى ادخال لعبة على شكل سيارة يتم التحكم فيها لاسلكيا إلى السوق . ولدى الشركة ثلاثة طرازات مختلفة ممكنة هى الطرازات X و Y و Z وهى مختلفة فى درجة تعقيدها . ولكن الشركة لديها طاقة انتاجية تكفى لانتاج طراز واحد فقط . وفيما يلى الربح المتوقع فى ظل الحالات الثلاث الممكنة لتقبل الجمهور للطرازات الجديدة .

تقبل الطراز	الربح بآلاف الجنيهات للطرازات X	Y	Z
ممتاز	120	100	60
متوسط	80	60	50
ضعيف	−30	−20	0

أوجد أفضل طراز يجب انتاجه بطريقة
١ ـ الحد الأعلى ـ الأدنى .
٢ ـ الحد الأعلى ـ الأعلى .
٣ ـ الحد الأدنى ـ الأعلى مطبقا على الفرصة الضائعة .

تمارين

١٣ ـ ١ توجد ثلاثة خيارات أمام شركتك لتنفيذ الالتزام الذى تعهدت به عند بيع 2000 جهاز اتصال لمجموعة من الفنادق . وكان الالتزام بضمان عمل الاجهزة سنتين مع صيانتها مجانا والخيارات الثلاثة هى :
(١) القيام بالصيانة بالقوى الذاتية . وطبقا للخبرة السابقة ستكون التكاليف كما يلى :

التكاليف الكلية	مدى الصيانة	احتمال الحدوث
7 000	اعطال قليلة جدا (500 طلب فى العام)	0.3
12 000	اعطال عادية (1000 طلب فى العام)	0.5
25 000	أعطال كثيرة (1500 طلب فى العام)	0.2

(٢) التعاقد من الباطن مع شركة Z التى عرضت اجراء الصيانة مقابل مبلغ ثابت هو 000 14£ مضافا إليه 2£ لكل زيارة تزيد عن 750 زيارة خلال فترة العامين .
(٣) التعاقد من الباطن مع شركة Y التى عرضت اجراء الصيانة مقابل مبلغ ثابت هو 000 15£ . والمطلوب تقديم النصح للشركة عن الاختيار الواجب اجراؤه . بين سبب الاقتراح .
(م م ت أ ـ الجزء الرابع ـ نوفمبر ١٩٧٤)

١٣ ـ ٢ تقوم شركتك بانتاج سلع لسوق تتغير فيه التكنولوجيا بسرعة . وقد طورت إدارة البحوث والتطوير منتجا جديداً يبدو أن له امكانيات طيبة للاستغلال التجارى . ومطلوب مبلغ 000 60£ أخرى لاختبار المنتج الجديد . ولدى الشركة 100 عميل ، ويمكن أن يشترى كل عميل وحدة واحدة من المنتج على الأكثر . وتقترح ادارة بحوث السوق بيع المنتج بمبلغ 6000£ للوحدة وتقدر التكاليف المتغيرة للانتاج والبيع بنحو 2080£ للوحدة .

وقد أمكن استنباط توزيع احتمالى حسب عدد العملاء الذين سيشترون المنتج كما يلى وذلك كنتيجة للخبرة السابقة فى هذا النوع من السوق .

الاحتمال	نسبة العملاء
0.1	0.04
0.1	0.08
0.2	0.12
0.4	0.16
0.2	0.20

والمطلوب :

تحديد الفرصة الضائعة المتوقعة دون معلومات أخرى غير تلك المعطاه ، وتحديد ما إذا كان على الشركة تطوير المنتج أولا .

(م م ت أ - المهنى ١ - نوفمبر ١٩٧٨)

١٣ -٣ قامت شركة RM(Midland) مؤخرا بتركيب ماكينات جديدة ، ولكنها لم تقرر بعد العدد المناسب من قطعة غيار معينة لازمة للاصلاح . وتتكلف كل قطعة غيار £2000 ولكنها متاحة فقط اذا طلبت الان . واذا تعطل المصنع ، ولم تكن هناك قطع غيار ، فإن تكاليف اصلاح المصنع ستكلف الشركة £15 000 والعمر الافتراضى للمصنع هو 10 سنوات واحتمالات التعطل خلال هذه الفترة على أساس الخبرة السابقة مع مثل هذا المصنع كما يلى :

الاحتمال	عدد مرات التعطل فى فترة عشر سنوات
0.1	0
0.4	1
0.3	2
0.1	3
0.1	4
لاشيء	5 أو أكثر

أهمل أى خصم على قيمة النقود مع الزمن .

والمطلوب حساب :

(أ) العدد المتوقع لحالات التعطل فى فترة عشر سنوات.

(ب) أفضل عدد لقطع الغيار التى يجب شراؤها الآن .

(ويجب أن يتضمن الحل جدولا لاظهار الطرق المختلفة للطلب وللتعطل)

(جـ) تكاليف خطة الشراء المختارة الان .

(د) قيمة المعلومات الكاملة عن عدد الأعطال فى فترة العمر الافتراضى وهى عشر سنوات .

(م م ت أ - المهنى - ١ - مايو ١٩٨٠)

١٣ - ٤ تواجه منتج للمعدات الكهربائية للسيارات مشكلة انشاء مصنع جديد لانتاج المعدا الالكترونية للسيارات . وقد أجريت عدة تقديرات لحجم المصنع الجديد . وتم اختيار حجمين على أساس التنبؤات عن مستقبل الطلب على

السيارات الجديدة . وتقدر تكاليف المصنع الكبير بمبلغ £3m والمصنع الصغير بمبلغ £1.4m ويقدر الدخل السنوى لكل حجم للمصنع حسب الطلب بما يلى :

حجم المصنع	الطلب	
	عالى بالاف الجنيهات	منخفض بالاف الجنيهات
كبير	1200	300
صغير	500	400

وقد تم تقييم النتائج الممكنة التالية على أساس عمر افتراضى للمصنع ست سنوات .

١ ـ أن يكون الطلب عاليا فى السنتين الاوليين ، ثم ينخفض . ولهذا الوضع احتمال هو 20%

٢ ـ أن يكون الطلب عاليا فى السنتين الأوليين ، ثم يبقى عاليا للسنوات الأربع التالية . واحتمال هذا الوضع 40%

٣ ـ أن يكون الطلب منخفضا فى السنتين الأوليين ، ثم يظل منخفضا طيلة السنوات الأربع التالية . واحتمال هذا الوضع 15% .

٤ ـ أن يكون الطلب منخفضا فى السنتين الأوليين ، ثم يرتفع خلال السنوات الأربع التالية . واحتمال هذا الوضع 25% .

والجدول التالى التكاليف الاستثمارية ، والدخل النقدى بالأسعار الحالية للحجمين الممكنين للمصنع وعند الطلب العالى والمنخفض .

حجم المصنع	الطلب	الدخل النقدى الصافى بالأسعار الحالية	
		العامين الأول والثانى (بالاف الجنيهات)	الأعوام الثالث حتى السادس (بالاف الجنيهات)
كبير	عالى	2088	3132
	منخفض	522	783
صغير	عالى	870	1305
	منخفض	696	1044

وقد تم حساب القيم الصافية بالأسعار الحالية للفترتين اللتين تغطيهما التنبوءات بمعدل 10% سنويا ، وهو سعر الفائدة المتوقع .

والمطلوب :

(أ) رسم شجرة القرار للبيانات الموضحة أعلاه مع بيان الاحتمالات لكل فرع . ويجب تدعيم الشجرة بجدول للاحتمالات يبين بوضوح كيفية حسابها .

(ب) تقييم شجرة القرار . وتقديم النصح للادارة عن المصنع الذى يجب انشاؤه اذا كان يجب انشاء أحدهما .

(م م ت أ ـ المهنى ١ ـ نوفمبر ١٩٧٩)

الفصل الرابع عشر

التوزيعات الاحتمالية

١٤ ـ ١ التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

كل الأمثلة الاحتمالية التى نظرت فى الفصل الثانى عشر تحتوى بصفة عامة على توزيعات احتمالية منفصلة . ولكل تجربة هناك مجموعة منفصلة من النتائج الممكنة ، ولكل نتيجة احتمال مرتبط بها .

وبالنظر فنيا إلى المسألة نجد أنها قيم لمتغير عشوائى ناتج من تجربة يتبعها توزيع احتمالى ، وكمثال بسيط يوضح فكرة التوزيع الاحتمالى المنفصل هو قائمة التسجيل التى نحصل عليها عند رمى حجر نرد . فالمتغير يمكن أن يأخذ ستة قيم منفصلة 5,4,3,2,1 و 6 واحتمال كل نتيجة هو $1/6$.

وكمثال بسيط آخر للتوزيع الاحتمالى المنفصل هو مثال آلة الفاكهة الذى ذكر فى الفصل الثالث عشر ، حيث اعتبرنا آلة فاكهة لها ثلاثة دواليب بكل منها أربع تفاحات وموزة واحدة .
النتيجة والأرباح المرتبطة بها كما يلى :

50 عملة	تربح	موزة	موزة	موزة
3 عملات	تربح	تفاحة	موزة	تفاحة
5 عملات	تربح	موزتان فى أى مكان		
0 عملة	تربح	كل الترتيبات الأخرى		

(ج م م ـ أساس ب ـ ديسمبر ١٩٧٨)

النتائج هى ترتيبات التفاح والموز ، والمتغير العشوائى هو عدد العملات المكتسبة . وعدد النتائج الممكنة هو 125 ولكن المتغير العشوائى يأخذ 4 قيم ممكنة هى 3,5,0 و 50 والاحتمالات المرتبطة بهذه القيم هى على التوالى : $1/125$, $16/125$, $12/125$ و $96/125$.

وتعبير « التوزيع الاحتمالى المنفصل » غالبا مايستخدم فى معنى خاص أكثر مما فى الفقرة السابقة ، لأنه يستخدم للدلالة على مجموعة من الاحتمالات المرتبطة بقيم متغير عشوائى منفصل ناتج عن نوع خاص من التجارب . فمثلا ، توزيع ذات الحدين الذى درس فى البند ١٤ ـ ٢ فانه مثال لتوزيع احتمالى منفصل فى هذا المعنى . وقيم المتغير العشوائى المرتبط بتجربة تحقق شروطا عامة معينة تتبع هذا التوزيع ، لذلك بدراسة هذا التوزيع الاحتمالى المنفصل

نستطيع استنتاج التقارير حول الاحتمالات المرتبطة بكل التجارب التى تحقق هذه الشروط العامة . فمثلا توزيع بواسون الذى درس فى البند رقم ١٤ ـ ٣ له نفس الشيء للتجارب التى تحقق مجموعة مختلفة من الشروط العامة .

وهذه التوزيعات مفيدة فى الحياة العملية لأن مداها الواسع من الناحية العملية يؤدى إلى قيم لمتغير عشوائى يتبع هذه التوزيعات ، والأمثلة والمسائل التى ذكرت ماهى إلا معادلة تعكس تنوع التطبيق .

١٤ ـ ٢ توزيع ذو الحدين

سنبدأ باعتبار مثال لموقف ما حيث يكون هذا التوزيع مناسبا ثم نعمم النتائج التى نحصل عليها .

بائع للموسوعات من الباب للباب يظن ، من خبرة سابقة أنه اذا تمكن من دخول أى منزل فإنه يستطيع أن يبيع باحتمال 0.4 . فاذا دخل البائع خمسة منازل خلال فترة معينة فما هو إحتمال أن يبيع ثلاث موسوعات بالضبط ؟

احتمال البيع 0.4 ، فيكون احتمال عدم البيع $0.6 = 0.4 - 1$ ولكى يكون هناك ثلاث مبيعات بالضبط فى خمسة منازل ، فانه يجب أن يكون هناك ثلاثة مبيعات واثنين عدم بيع . ونفترض مبدئيا أن البيع فى المنازل الثلاثة الاولى . لذلك

P (بيع $\cap$ بيع $\cap$ بيع $\cap$ عدم بيع $\cap$ عدم بيع)

$= P$ (بيع) $\times P$ (بيع) $\times P$ (بيع) $\times P$ (عدم بيع) $\times P$ (عدم بيع)

$= 0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.6 \times 0.6$

$= (0.4)^3 \times (0.6)^2$

نفرض أن البيع فى المنزل الثانى ، والثالث، والخامس

P (عدم بيع $\cap$ بيع $\cap$ بيع $\cap$ عدم بيع $\cap$ بيع)

$= P$ (عدم بيع) $\times P$ (بيع) $\times P$ (بيع) $\times P$ (عدم بيع) $\times P$ (بيع)

$= 0.6 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.6 \times 0.4$

$= (0.4)^3 \times (0.6)^2$

بالمثل كل التوافيق الممكنة لثلاث حالات بيع ، وحالتى عدم بيع لها الاحتمال $(0.4)^3 \times (0.6)^2$. وهذه التوافيق متباعدة عن بعضها . لذلك فان الاحتمال المطلوب للحصول على ثلاث حالات بيع بالضبط يوجد باضافة المشتركات $(0.4)^3 \times (0.6)^2$ مع بعضها لكل التوافيق المنفصلة . لذلك فان :

P (بالضبط 3 مبيعات) $= (0.4)^3 \times (0.6)^2 \times$ (عدد التوافيق لثلاث مرات بيع ومرتين عدم بيع من بين دخول 5 منازل)

ولكننا نعلم من الفصل الثانى عشر ، البند ١٢ ـ ٦ أن عدد التوافيق لثلاث حالات بيع وحالتى عدم بيع ، من بين خمس حالات هو :

$$_5C_3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

وبدلا من ذلك فان $_5C_3$ يمكن إيجادها باستخدام مثلث باسكال . لذلك

P (بالضبط 3 مبيعات) $= {}_5C_3(0.4)^3(0.6)^2$

$= 10 \times 0.064 \times 0.36$

$= 0.23$

اذن فالشروط العامة التى يجب توافرها عند اجراء تجربة لكى يطبق توزيع ذات الحدين هى كما يلى :

١ ـ يجب أن يكون عدد مرات أجراء التجربة محدود وليكن n .

٢ ـ كل تجربة لها نتيجتان ممكنتان « نجاح » أو « فشل »

٣ ـ احتمال النجاح فى كل تجربة ثابت ، وليكن P .

الشرط الأخير يدل على أن التجارب مستقلة عن بعضها .

ونلاحظ أن هذه الشروط متحققة فى المثال السابق . نعتبر أن البائع تمكن من دخول خمسة منازل ، لذلك فالشرط (١) تحقق ـ ودخول كل منزل يترتب عليه احدى النتيجتين بيع ، أو عدم بيع ، لذلك فالشرط (٢) قد تحقق . واحتمال البيع فى كل منزل متماثل وهو 0.4 ، ولذلك فالشرط (٣) قد تحقق أيضا .

عندما تتحقق الشروط (١) ، (٢) ، (٣) ، فان عدد النجاح الممكن الحصول عليه عند اجراء التجربة n من المرات يقال أنه يتبع توزيع ذات الحدين ، واحتمال الحصول على عدد محدود من النجاح من بين n من المحاولات هو :

$$P\ (r \text{ من النجاحات}) = {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$$

حيث r يمكن أن يأخذ إحدى القيم 0 , 1 , ... , n وفى المثال السابق $n = 5$, $P = 0.4$, $r = 3$.

هناك جداول مطبوعة خاصة بتوزيع ذات الحدين لتوافيق مختلفة لقيم p و n ولكن لعدد محدود من هذه التوافيق حتى لايصبح الجدول كبيرا جدا . لذلك اذا دعت الحاجة إلى احتمالات ذات الحدين ، فإنه من الضرورى غالبا حسابها باستخدام الصيغة السابقة .

من التطبيقات الشائعة لتوزيع ذات الحدين هى مراجعة الجودة فى عينة لمعرفة المعيب منها ، والمثال التالى يوضح ذلك .

مثال ١٤ ـ ٢ ـ ١:مشروع معاينة يتضمن أخذ عينة مكونة من عشر وحدات من انتاج كل الكمية وترفض الكمية اذا وجد أكثر من وحدتين معيبتين فى العينة . فاذا كان فى الحقيقة خمسة فى المئة من كل الوحدات معيبا فما هو احتمال رفض الكمية ؟

الاجابة:لكى نرفض الكمية يجب أن تحتوى العينة على 9,8,7,6,5,4,3 أو 10 من الوحدات المعيبة ، لذلك فان احتمال الرفض يشمل ايجاد مجموع احتمالات هذه الأعداد المختلفة للمعيبات . وهذه عملية شاقة ، ولكن من الأفضل ايجاد احتمالات 2,1,0 معيبات ثم جمعها وطرح النتيجة من مجموع جميع الاحتمالات الممكنة وهو دائما 1 .

وهذه العملية تتبع توزيع ذات الحدين حيث $p = 0.05$, $n = 10$ لذلك

$$P\ (\text{وحدتان معيبتان}) = {}_{10}C_2 (0.05)^2 (0.95)^8$$

$$= \frac{10!}{2!8!} = 0.0025 \times 0.6634 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} \times 0.001\ 66 = 0.0746$$

$$P\ (\text{وحدة معيبة واحدة}) = {}_{10}C_1 (0.05)^1 (0.95)^9$$

$$= \frac{10!}{1!9!} \times 0.05 \times 0.6302 = 10 \times 0.031\ 51 = 0.3151$$

(ولا وحدة معيبة) P لايحتاج لصيغة ذات الحدين لأن حسابها ببساطة هو احتمال عشرة من الحوادث المستقلة كل منها له الاحتمال 0.95 علما بأن $0! = 1$ وهذه الحالة توافق النموذج العام لذات الحدين

$$P\text{(ولا وحدة معيبة)} = {}_{10}C_0(0.05)^0(0.95)^{10}$$
$$= \frac{10!}{0!\,10!} \times 1 \times 0.5987 = 1 \times 1 \times 0.5987 = 0.5987$$

لذلك فان :

$$P\text{(وحدتان معيبتان ، أو أقل)} = P(0) + P(1) + P(2)$$
$$= 0.0746 + 0.3151 + 0.5987 = 0.9884$$

وبالتالى فان:

$$P\text{ (رفض الكمية)} = P\text{(أكثر من وحدتين معيبتين)}$$
$$= 1 - 0.9884 = 0.0116$$

أى أن 1.16% من الكمية يمكن أن يرفض فى عملية المعاينة .

وتتضمن التمارين التالية تمرينا فى معاينة اللوطات وسؤالا خاصا بتدريب الأفراد .

تمرين ١٤ ـ ٢ ـ ١ : كمية من الوحدات تحتوى على 20% وحدات معيبة . أخذت عينة عشوائية مكونة من ست وحدات من الكمية ، باستخدام توزيع ذات الحدين أوجد احتمال أن ، العينة تحتوى على :

(أ) وحدة واحدة معيبة .

(ب) اثنتين ، أو اكثر من الوحدات معيب .

تمرين ١٤ ـ ٢ ـ ٢ : كل دفعة تجنيد جديدة لرجال العسكرية فى منظمة أركان حرب معينة تتلقى فترة تدريب يليها اختبار لتحديد اللائق للعمل الماهر . ونفترض أن المجندين يجتازون الاختبار باحتمال 0.8 فما هو احتمال أن مجموعة من بين عشرة من المجندين تفرز على الأقل سبعة لائقين للعمل الماهر ؟

(م أ أ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٣)

الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لتوزيع ذات الحدين : يعرف الوسط الحسابى لتوزيع ما بأنه القيمة المتوقعة لمتغير عشوائى ينتمى لهذا التوزيع ، أى أنه القيمة المتوسطة المتوقع أن يأخذها المتغير العشوائى عند إجراء التجربة عدد كبير من المرات . وفى حالة توزيع ذات الحدين هذه يعنى اعتبار مجموعات متعددة من n من المحاولات والمطلوب هو العدد المتوسط للنجاح فى كل مجموعة من n من المحاولات . ففى مثال بائع الموسوعات نجد أن 0.4 هو احتمال البيع فى كل منزل ، ولذلك ، فإنه فى مجموعة دخول خمسة منازل ، فانه فى المتوسط يحصل على $5 \times 0.4 = 2$ من المبيعات .

عموما الوسط الحسابى لتوزيع ذات الحدين لعدد n من المحاولات ، وكل منها له احتمال النجاح p يحسب np .

وطبقا للصيغة العامة للقيمة المتوقعة التى درست فى البند ١٣ ـ ٢ . فالأساس المستخدم لحساب هذه القيمة هو

$$\sum_{r=0}^{n} r \times {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$$

ونتيجة هذا المجموع هو np والانحراف المعيارى لتوزيع ماهو مقياس الاختلاف فى قيمة المتغير العشوائى من محاولة اجراء التجربة لمحاولة أخرى . ولحسابة نستخدم نفس قاعدة حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من البيانات ، أى إيجاد القيمة المتوقعة لـ^2(المتغير ـ الوسط الحسابى) ثم أخذ الجزر التربيعى للنتيجة . فالبنسبة لتوزيع ذات الحدين حيث لدينا n من المحاولات ، واحتمال p للنجاح فى كل منها نجد

$$\sqrt{\sum_{r=0}^{n} (r-np)^2 \times {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}}$$

ونتيجة ذلك هو :

$$\text{الانحراف المعيارى} = \sqrt{np(1-p)}$$

وفى حالة بائع الموسوعات حيث $n = 5$, $p = 0.4$ نجد أن

$$\text{الانحراف المعيارى} = \sqrt{5 \times 0.4 \times 0.6} = \sqrt{1.2} = 1.095$$

هذا مقياس لاختلاف المبيعات المتوقعة للبائع من اختياره واحد من الخمس مداخل الى آخر .

نفس النتائج التى طبقت للوسط الحسابى وللانحراف المعيارى للتوزيع الذى درس فى البند ٨ ـ ٦ وتطبق أيضا للوسط الحسابى ، وللأنحراف المعيارى للبيانات ، أى أنه يمكننا استخدام نتيجة تشيبى شيف chebyshev حيث أنه فى مدى له k من الانحرافات المعيارية فان كل جانب من الوسط الحسابى يمكن التوقع بأنه يحتوى على الأقل نسبة

$$1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2$$

من القيم المأخوذة لذلك على الأقل 75% من تكرارات التجربة تؤدى الى قيمة لمتغير عشوائى ضمن قيمتين للانحراف المعيارى عن الوسط الحسابى ، وعلى الأقل 89% من التكرارات تؤدى الى قيمة ضمن ثلاثة انحرافات معيارية عن الوسط الحسابى .

مثال ١٤ ـ ٢ ـ ٢ : عشرة فى المئة من انتاج شركة معينة للكبريت به عيوب . فهى تبيع الكبريت فى علب بكل منها 500 عود . ضمن أى مدى متماثل حول الوسط الحسابى تستطيع الشركة أن تتوقع أن 89% من العلب بها عددها من المعيب ؟

الاجابة : $p = 0.1$ و $n = 005$

لذلك ، فان العدد المتوسط للمعيب فى كل علبة هو $np = 500 \times 0.1 = 50$ ، والانحراف المعيارى هو

$$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{500 \times 0.1 \times 0.9} = \sqrt{45} = 6.7$$

لذلك ، فانه على الأقل 89% من العلب يمكن التوقع بأنه يحتوى على عدد من الكبريت المعيب فى المدى من $50 - 3 \times 6.7$ إلى $50 + 3 \times 6.7$ أى أن

$$50 - 20.1 \quad to \quad 50 + 20.1$$

إذن على الأقل 89% من العلب ستحتوى على عدد من المعيب فى مكان ما من المدى 30 إلى 70 .

تمرين ١٤ ـ ٢ ـ ٣ : أخذت شركة فى تجنيد مجموعة من 100 عامل للتدريب ، وكان معدل السقوط فى منهج التدريب هو 50% ، ماهى الحدود التى يمكن أن يقع بينها عدد المجموعات الناجحة الناتجة من 75% على الأقل من المجموعات ؟

١٤ ـ ٣ التوزيع البواسونى

عند دراسة توزيع ذات الحدين كان الأهتمام بالتجارب التى لها عدد محدود n من مرات اجرائها وبعدد المرات التى يمكن الحصول فيها على نجاح . لذلك فان متغير ذات الحدين يمكن أن يأخذ القيم $0 , 1 , 2 , ... , n$.

وعند دراسة توزيع بواسون يكون الاهتمام بعد حدوث ظاهرة ما فى فترة زمنية والتى يمكن أن تحدث أى عدد من المرات خلال هذه الفترة . ومن الأمثلة على ذلك عدد المكالمات التليفونية التى تصل إلى السنترال فى دقيقة ما ، عدد الأخطاء فى طباعة صفحة أو عدد خلايا الدم الحمراء فى عينة 1 ملليلتر من الدم . هذه المتغيرات العشوائية ممكن أن تأخذ القيم $0 , 1 , 2 , 3....$. لذلك ، فان توزيع بواسون هو أيضا توزيع منفصل ، ولكن لايوجد حد أعلى للقيم التى يمكن أن يأخذها المتغير العشوائى . والشرط الذى يجب توافره فى تجربة لتطبيق توزيع بواسون هو أن يكون عدد مرات حدوث الظاهرة فى الفترة الزمنية المعينة عشوائيا تماما . التعبير الرياضى لهذا الشرط واستنتاج صيغة الاحتمال منه لاحاجة لنا به الان . لذلك سوف لانحاول استنتاج الصيغة ، كما استنتجنا صيغة ذات الحدين وهى :

$$P\ (\text{من النجاحات } r) = {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$$

ولكن سنذكرها فقط ثم نستخدمها . صيغة احتمال بواسون هى

$$P(\text{من الحوادث } r) = \frac{m^r}{r!} e^{-m}$$

حيث m هو العدد المتوسط المتوقع لحدوث الظاهرة فى فترة زمنية ذات حجم معين . وفى هذا التعبير e هى العدد 2.71828 والمقدار e^{-m} يمكن ايجاده من الجداول ، أو حسابه بالة حاسبة (أنظر البند ٢ ـ ٤) .

توزيع بواسون ذو أهمية فى مشاكل الطوابير البسيطة والشائعة . وسنبدأ أمثلة توزيع بواسون بدراسة أبسط مشاكل الطوابير .

مثال ١٤ ـ ٣ ـ ١: يأخذ القادمون الى طابور أماكنهم عشوائيا بمعدل 150 فى الساعة . ماهو احتمال أن ثلاثة ، أو أكثر من الأشخاص سوف يصلون فى دقيقة معينة ؟

الاجابة:طول الفترة الزمنية هو دقيقة واحدة . ومعدل الوصول هو 150 فى الساعة ولذلك فإن العدد المتوسط للقادمون فى فترة زمنية طولها دقيقة واحدة هو

$$m = \frac{150}{60} = 2.5$$

باستخدام توزيع ذات الحدين من الأفضل أن نحسب الاحتمال (3 أو أكثر) P بايجاد $P(0) + P(1) + P(2)$ ثم طرح هذا المجموع من الاحتمال الكلى ، وهو الواحد الصحيح ، وباستخدام توزيع بواسون نستخدم هذا المعنى أيضا بسبب غياب الحد الأعلى للقيم التى يمكن أن يأخذها المتغير العشوائى . لذلك فإن إجابة السؤال تكون أولا بحساب .

$$P(\text{عدد القادمين} = 0) = \frac{2.5^0}{0!}e^{-2.5} = \frac{1}{1}e^{-2.5} = e^{-2.5} = 0.082$$

ثم بايجاد

$$P(\text{عدد القادمين} = 1) = \frac{2.5^1}{1!}e^{-2.5} = \frac{2.5}{1}e^{-2.5} = 0.205$$

وأخيرا بايجاد

$$P(\text{عدد القادمين} = 2) = \frac{2.5^2}{2!}e^{-2.5} = \frac{6.25}{2}e^{-2.5} = 3.125\,e^{-2.5} = 0.257$$

لذلك ، فان

$$P(\text{عدد القادمين 4 أو أكثر فى أى دقيقة ما})$$
$$= 1 - (0.082 + 0.205 + 0.257)$$
$$= 1 - 0.544 = 0.456$$

وكمثال آخر اعتبر الاتى حيث الفترة تكون مسافة بدلا من الزمن .

مثال ١٤ ـ ٣ ـ ٢ : الأخطاء المطبوعة فى أنتاج عمل شركة خاصة تحدث عشوائيا بمعدل متوسط 0.6 لكل صفحة . ماهو احتمال أن سبع صفحات فى رسالة أعدت بالشركة تحتوى على أكثر من ثلاث أخطاء ؟

الاجابةمتوسط عدد الأخطاء لكل صفحة هو 0.6 . لذلك فان سبع صفحات من الرسالة تحتوى على العدد المتوسط $7 \times 0.6 = 4.2$ من الأخطاء .

$$P(\text{اخطاء عددها } 0) = \frac{4.2^0}{0!}e^{-4.2} = \frac{1}{1}e^{-4.2} = e^{-4.2} = 0.015$$

$$P(\text{خطأ واحد}) = \frac{4.2^1}{1!}e^{-4.2} = 4.2e^{-4.2} = 4.2 \times 0.015 = 0.063$$

$$P(\text{أخطاء عددها } 2) = \frac{4.2^2}{2!}e^{-4.2} = \frac{17.64}{2} \times 0.015 = 0.132$$

$$P(\text{أخطاء عددها } 3) = \frac{4.2^3}{3!}e^{-4.2} = \frac{74.088}{6} \times 0.015 = 0.185$$

لذلك فان

$$P(\text{الرسالة تحتوى على أكثر من 3 أخطاء})$$
$$= 1 - (0.015 + 0.063 + 0.132 + 0.185)$$
$$= 1 - 0.395 = 0.605.$$

هناك جداول مطبوعة لاحتمالات بواسون لقيم مختلفة للقيمة m . وحيث يوجد بارامتر واحد فقط ، فان هذه الجداول يمكن تقديمها لمدى واسع من القيم ، وتعتبر لذلك ذات أهمية عملية ، لأنها تعد الطريق العادى لايجاد احتمالات بواسون .

تمرين ١٤ ـ ٤ ـ ١ : تحدث فى الدور السفلى لشركة حوادث بمعدل متوسط أربعة حوادث لكل اسبوع . أوجد احتمال حدوث أقل من ثلاثة حوادث خلال اسبوع معين .

تمرين ١٤ ـ ٤ ـ ٢ : تصل السفن عشوائيا الى ميناء بمعدل متوسط أثنين فى اليوم ، وعلى الأكثر ثلاث سفن فى اليوم . وفى يوم محدد اذا كانت تكاليف التسهيلات المقدمة 200 £ فانه يمكن زيادة عدد السفن إلى أربعة فى اليوم . فاذا كان ربح السفينة هو 1000 £ فهل عملية زيادة عدد السفن تستحق الأهتمام ؟

الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لتوزيع بواسون : هذه المقاييس لها نفس الأهمية مثل مقاييس توزيع ذات الحدين ، وتحسب بنفس القاعدة . والوسط الحسابى لتوزيع بواسون هو m . وإذا كان هناك عدد غير محدود من الفترات كل منها له الطول المعلوم ، فان العدد المتوسط لحدوث الظاهرة فى كل فترة هو m . والانحراف المعيارى يقيس الاختلاف فى عدد مرات حدوث الظاهرة من فترة إلى اخرى . ويكون الانحراف المعيارى لتوزيع بواسون الذى له الوسط الحسابى m هو $\sqrt{m}$.

نفس النتائج العامة تطبق للوسط الحسابى والانحراف المعيارى لتوزيع بواسون فى حالة مجموعات البيانات كما طبقت فى توزيع ذات الحدين .

١٤ ـ ٤ التقريب البواسونى لتوزيع ذى الحدين

إذا كان لدينا تجربة ذات حدين (n من المحاولات ، ونتيجتين ، واحتمال النجاح ثابت فى كل محاولة) حيث أن عدد المحاولات كبيرا اذا قُورن بعدد مرات الحصول على نجاح ، فإن هذا يماثل تجربة بواسون . والحد الأعلى n لعدد النجاح يكون كبيرا لمثيله فى الحدوث ، ويجب أن يكون لانهائى .

لهذا عندما يكون لدينا توزيع ذات الحدين بحيث أن احتمال النجاح p أقل من 0.1 ، فان احتمالات ذات الحدين يمكن تقريبها إلى توزيع بواسون بوسط حسابى $m = np$ ويكون هذا الشرط مناسبا لأنه يشير إلى أن العدد المتوسط للنجاح فى كل مجموعة من المحاولات n أقل من عشر العدد الممكن للنجاح n .

يعتبر هذا التقريب مفيدا عمليا ، لأن جداول احتمالات بواسون أشمل من جداول ذات الحدين .

مثال ١٤ ـ ٤ ـ ١ : تحتوى مكونات انتاج شركة معينة على 16% وحدات معيبة ماهو إحتمال أن صندوقا به خمسون مكونة يحتوى على وحدتين ، أو أكثر معيبة ؟

الاجابة : هذه فى الحقيقة مسألة ذات حدين . كل مكونات الصندوق هو مجموعة من $n = 50$ من المحاولات ، وكل محاولة لها نتيجتان حيث أن المكونة ممكن أن تكون معيبة أو غير معيبه .

واحتمال الحصول على نجاح (مكونة معيبة) هو $p = 0.016$ فمن قاعدة ذات الحدين يكون

P (عدد الوحدات المعيبة 2 أو أكثر)

$= 1 - [P$ (عدد الوحدات المعيبة 0) $+ P$ (عدد الوحدات المعيبة 1) $]$

$$= 1 - [(1 - 0.016)^{50} + {}_{50}C_1\,(0.016)(1 - 0.016)^{49}]$$

$$= 1 - (0.984^{50} + 50 \times 0.016 \times 0.984^{49})$$

$$= 1 - (0.446 + 0.363) = 1 - 0.809 = 0.191$$

تقريب بواسون يشمل استخدام توزيع بواسون بوسط حسابى $m = np = 50 \times 0.016 = 0.8$

اذن

P (عدد الوحدات المعيبة 2 أو أكثر)

$= 1 - [P$ (عدد الوحدات المعيبة 0) $+ P$ (عدد الوحدات المعيبة 1)$]$ =

$$= 1 - \frac{0.8^0}{0!}e^{-0.8} + \frac{0.8}{1!}e^{-0.8}$$

$$= 1 - (0.449 + 0.359) = 1 - 0.808 = 0.192$$

النتيجتان متماثلتان جدا ولذلك فإن التقريب مناسب فى هذه الحالة حيث p صغيرة جدا .

تمرين ١٤ ـ ٤ ـ ١: نسبة انتاج شركة من السلع المعيبة هو 0.5% تباع السلع فى صناديق بكل منها 100 وحدة ، والشركة تضمن إرجاع الصندوق الذى يحتوى على أكثر من وحدتين معيبتين . وإرجاع مثل هذا الصندوق يكلف الشركة £2 فإذا فكرت الشركة فى خطة فحص للسلع مع استبعاد المعيب منها وكانت عملية الفحص تكلف 5 بنس لكل صندوق.استخدم تقريب بواسون لتوزيع ذات الحدين لتبين هل خطة الفحص تستحق الاهتمام ؟

١٤ ـ ٥ التوزيعات الاحتمالية المتصلة

كل التوزيعات الاحتمالية السابقة هى توزيعات احتمالية منفصلة . مرتبطة بمتغيرات (عدد مرات الحصول على نجاح ، وعدد الحوادث الممكنة) يمكن أن تأخذ قيم متباعدة فقط ، كما وصفت فى البند ١٤ ـ ١ . وفى هذا الجزء نتعامل مع متغيرات غالبا ما تأخذ أى قيم على الأقل فى مدى معين ، وهذه المتغيرات تؤدى إلى فكرة التوزيعات الاحتمالية المتصلة وعند التعامل مع متغيرات التوزيعات المتصلة لايمكن أن نتحدث عن احتمال أن المتغير يأخذ قيمة واحدة معينة ، كما كان الحال فى التوزيعات المنفصلة . كمثال على ذلك لانستطيع أن نطلب احتمال أن شخص اختير عشوائيا وزنه 71.325 كجم أو شركة معينة تنتج قضيبا معدنيا طوله 2.7183 متر ففى حالة متغيرات التوزيعات المتصلة مثل هذه الاحتمالات للقيم الفردية تساوى دائما صفرا . ولكن ما نريده هو إحتمال أن المتغير يأخذ قيمة فى مدى محدد . لذلك فالأمثلة تصبح ، إحتمال أن وزن شخص يقع بين 68.4 كجم و 69.4 كجم أو احتمال أن طول القضيب يقع بين 3.74 متر و 3.78 متر .

لفهم حساب مثل هذه الاحتمالات نعتبر مرة ثانية البيانات المستخدمة فى البند ٧ ـ ١ قيم الفواتير التى أصدرت بشركة فى يوم معين كانت

£	£	£	£	£	£	£	£	£	£
17.35	6.80	9.05	14.80	24.70	23.45	29.90	9.95	15.90	22.40
16.45	11.50	17.55	18.60	9.40	13.35	26.60	6.65	10.25	19.00
23.95	18.45	12.70	19.05	15.15	18.30	15.16	12.80	23.40	5.55
8.75	18.80	20.45	15.80	22.50	19.10	14.55	11.15	16.35	26.60

فى الفصل السابع جمعنا هذه الأشكال فى جداول تكرارية لمختلف الأنواع. والرسوم البيانية تعتمد على الجداول. من هذه البيانات يمكننا استنتاج جدول التوزيع التكرارى كما يلى :

الفئة	التكرار
من £2 وأقل من £6	1
من £6 وأقل من £10	6
من £10 وأقل من £14	6
من £14 وأقل من £18	10
من £18 وأقل من £22	8
من £22 وأقل من £26	6
من £26 وأقل من £30	3

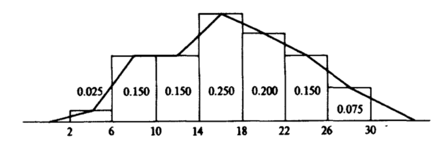
المدرج التكرارى ، والمضلع التكرارى المرسومان فى البند ٧ ـ ٢ يعتمدان على هذه الجداول ، وأيضا فى البند ٧ ـ ١ الجدول التكرارى يتحول إلى جدول التكرار النسبى وجدول التوزيع التكرارى يمكن تحويله إلى جدول التكرار النسبى كما يلى :

$$\text{التكرار النسبى} = \frac{\text{تكرار الصف}}{\text{التكرار الكلى}}$$

الفئة	التكرار النسبى
من £2 وأقل من £6	0.025
من £6 وأقل من £10	0.150
من £10 وأقل من £14	0.150
من £14 وأقل من £18	0.250
من £18 وأقل من £22	0.220
من £22 وأقل من £26	0.150
من £26 وأقل من £30	0.075
	المجموع = 1

ويمكن رسم المدرج التكرارى ، والمضلع التكرارى بالاستعانة بهذا الجدول كما هو موضح فى الشكل ١٤ ـ ١ ، ونلاحظ أن مساحة كل مستطيل فى المدرج التكرارى تتناسب مع التكرار النسبى للقيم فى الفترة المناظرة والمساحة الكلية للمدرج التكرارى تتناسب مع التكرار النسبى الكلى ، أى مع الواحد الصحيح . وهذه هى نفسها المساحة الكلية للمضلع التكرارى .

نفرض أننا نريد عدد الفترات بتقسيم أدق للمدى ، الى فترات طولها £2 وبالتالى فان جدول التوزيع النسبى يمكن الحصول عليه .

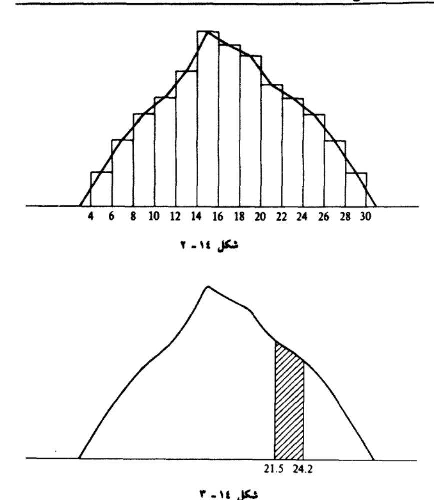


شكل ١٤ - ١

الفئة	التكرار النسبى
من £4 وأقل من £6	0.025
من £6 وأقل من £8	0.050
من £8 وأقل من £10	0.070
من £10 وأقل من £12	0.080
من £12 وأقل من £14	0.100
من £14 وأقل من £16	0.130
من £16 وأقل من £18	0.120
من £18 وأقل من £20	0.110
من £20 وأقل من £22	0.090
من £22 وأقل من £24	0.080
من £24 وأقل من £26	0.070
من £26 وأقل من £28	0.050
من £28 وأقل من £30	0.025

المدرج التكرارى والمضلع التكرارى لهذا الجدول للتكرار النسبى موضحة ، فى الشكل ١٤ - ٢ ، مرة أخرى مساحة كل مستطيل فى المدرج التكرارى يمثل التكرار النسبى للقيم فى الفترة المناظرة والمساحة الكلية للمدرج التكرارى ، والتى هى المساحة تحت المضلع التكرارى تتناسب مع التكرار النسبى الكلى ، وهو الواحد الصحيح .

نتصور أن هذه العملية استمرت حيث لدينا المجتمع ككل فإنه أصبح فى استطاعتنا تقسيم المدى إلى عدد لانهائى من الأقسام الصغيرة . ففى هذه الحالة سيصبح المضلع التكرارى النسبى منحنى أملس ، والمساحة تحته بين أن قيمتين سوف تمثل احتمال أن المتغير يأخذ قيمة فى هذا المدى . هذه الحالة النهائية للمثال موضحة فى الشكل ١٤ - ٣ . والمساحة المظللة هى احتمال أن القيمة تقع بين £21.50 و £24.20 .



شكل ١٤ - ٢

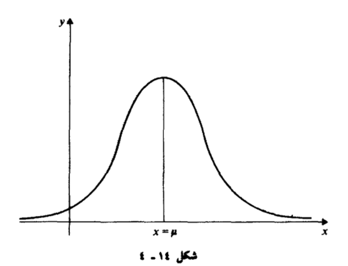
شكل ١٤ - ٣

كل متغير يتبع التوزيع المتصل يرتبط به منحنى من هذا النوع يسمى منحنى دالة كثافة الاحتمال (د . ك . أ) وترتبط احتمالات المتغيرات ذات التوزيع المتصل بالمساحات تحت منحنى دالة كثافة الاحتمال . وسوف نتناول أمثلة على ذلك فى البنود ١٤ - ٦ و ١٤ - ٧ .

١٤ - ٦ التوزيع الطبيعى

هذا التوزيع هو أفضل وأكثر التوزيعات الاحتمالية المتصلة استخداما . والسبب فى ذلك هو أن توزيعات كثيرة لمتغيرات مثل الطول ، والوزن ، والزمن (تقريبا على الأقل) تتبع توزيعات طبيعية . والسبب الثانى والرئيسى لأهمية التوزيع الطبيعى ، ينتج من النتيجة الرياضية التى تسمى بنظرية النهاية المركزية ، وخلاصة هذه النظرية أنه إذا أضفنا عددا كبيرا كبرا كافيا من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة فى التوزيع إلى بعضها بأى طريقة فان توزيع المجموع سيكون تقريبا هو التوزيع الطبيعى . وهذا له استنتاجات عملية عظيمة فى نظرية المعاينة حيث أنها تخبرنا بأنه عند أخذ عينات عشوائية كبيرة كبرا كافيا لمتغير ذات أى توزيع فان متوسطات العينة سوف يكون لها - تقريبا - التوزيع الطبيعى وسوف يتضح أهمية هذا فى الفصول اللاحقة . عموما أنظر الجزء ١٥ - ١ .

ومنحنى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعى له خاصية « شكل الجرس » كما فى شكل ١٤ - ٤ .



شكل ١٤ - ٤

وشكل الجرس يتحدد تماما لأى توزيع طبيعى خاص اذا علمنا الوسط الحسابى μ والانحراف المعيارى σ لهذا التوزيع .

وقيمة μ تخبرنا بمكان مركز الجرس وقيمة σ تخبرنا بكيفية الانتشار حوله . لهذا ، فإن القيمة الصغيرة لـ σ تعنى أنه لدينا جرس طويل مدبب بينما القيمة الكبيرة لـ σ تعنى أن الجرس قصير ومفرطح - ولاحظ أن المساحة الكلية تحت كل جرس يجب أن تكون الواحد الصحيح حيث أننا نتحدث عن منحنى دالة كثافة الاحتمال وذلك ، فإن المساحة الكلية تحته تمثل الاحتمال الكلى .

واذا كان لدينا توزيع طبيعى ذو وسط حسابى μ وانحراف معيارى σ فان معادلة منحنى دالة كثافة الاحتمال له تكون على الصورة التالية

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

أنه من غير المستحب استخدام هذا التعبير الصعب ولكنا ذكرناه لنؤكد أن لدينا الآن معلومات كاملة عن منحنى دالة كثافة الاحتمال .

والعمل على إيجاد المساحات تحت منحنيات دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعى كحساب الاحتمالات هو أسهل بكثير من حسابها باستخدام معادلة المنحنى ، والتى تحتاج الى حاسب آلى ، أو على الأقل آلة حسابية الكترونية . ومن السهل إيجاد المساحات بواسطة الحقيقة الهامة الاتية :

المساحة تحت منحنى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعى وراء عدد محدد للانحرافات المعيارية عن الوسط الحسابى دائما واحدة ، دون النظر إلى قيم خاصة للانحراف المعيارى والوسط الحسابى

لهذا فإن مسائل التوزيع الطبيعى يمكن حلها بحساب عدد من الانحرافات المعيارية وبالقيمة التى تختلف عن الوسط الحسابى ، ثم بالبحث فى الجدول عن المساحة تحت منحنى دالة كثافة الاحتمال وراء عدد من الانحرافات المعيارية عن الوسط الحسابى .

مثال ١٤ ـ ٦ ـ ١ : وحدات مصنعة تباع فى صناديق ويحتوى كل صندوق على وزن 40 أوقية على الأقل . والوزن الحقيقى للصندوق متغير ، يتبع التوزيع الطبيعى التقريبى بوسط حسابى 41.2 أوقية وانحراف معيارى 0.8 أوقية .
المطلوب هو :
١ ـ حساب نسبة الصناديق التى وزنها يقع بين 40 أوقية و 42 أوقية .
٢ ـ كل الصناديق التى تحتوى على اقل من 40 اوقية يستغنى عنها بمبلغ £1 لكل صندوق . أحسب قيمة الصناديق التى يستغنى عنها عند بيع 100 صندوق .

(ح م م ـ أساس ب ـ يونيو ١٩٨٠)

الاجابة منحنى دالة كثافة الاحتمال لهذا المثال كما فى شكل ١٤ ـ ٥ . عدد الانحرافات المعيارية بين 40 و 41.2 هى

$$\frac{41.2-40}{0.8}=\frac{1.2}{0.8}=1.5$$

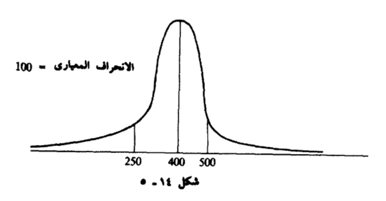
بالاشارة الى جداول المساحة اللاحقة بالتوزيع الطبيعى نجد أن المساحة تحت المنحنى وراء 1.5 من الانحرافات المعيارية عن الوسط الحسابى هى 0.06668 .

عدد الانحرافات المعيارية بين 41.2 و 42 هى

$$\frac{42-41.2}{0.8}=\frac{0.8}{0.8}=1$$

من الجداول نجد أن المساحة وراء الانحراف المعيارى عن الوسط الحسابى 0.1587 لذلك ، فإن المساحة بين 40 و 42 توجد بطرح هاتين المساحتين من المساحة الكلية تحت المنحنى . أى أن

$$1-0.0668-0.1587=0.7745$$



شكل ١٤ ـ ٥

ونتيجة ذلك نجد أن

١ ـ نسبة الصناديق التى تقع أوزانها بين 40 أوقية ، 42 أوقية هى 0.7745 .
٢ ـ الانتاج الكلى لاتمام بيع 100 صندوق هو T . نسبة البيع من الانتاج هى $0.9332 = 0.0668 - 1$ حيث أننا وجدنا سابقا أن النسبة 0.0668 تزن أقل من 40 أوقية . لذلك فإن $0.9332T = 100$ والتى منها نجد أن $T = 107.158$. إذن عدد ما يلغى من بيع 100 صندوق هو 7.158 وبالتالى : فإن القيمة هى £7.16 .

فى بعض المواقع يكون استخدام جداول التوزيع الطبيعى غير ضرورى ، والمثال التالى يوضح ذلك .

مثال ١٤ ـ ٦ ـ ٢ : بطاقة على وعاء به سائل كيميائى تشير إلى أن سعر البيع 10 بنسات لكل لتر ، وأن الوعاء يحتوى على 10 لترات . على أن معلومات الملء لاتستطيع ملء كل وعاء بنفس الحجم من السائل تماما . فالحجوم موزعة طبيعيا ولها انحراف معيارى قيمته 0.2 لتر ، والذى يعامل على أنه ثابت ، ولكن متوسط الملء (وهو حاليا 10 لترات) ممكن تعديله. نظام التعديل يتطلب أن الأوعية التى تحتوى على أقل من 10 لترات لاتزيد على واحد فى المائة .

ثم أدخلت احدى الشركات تعديلا مناسبا على معدات الملء ، والتى غيرت الانحراف المعيارى إلى 0.15 من اللترات . عملية التعديل تتكلف £5000 ، والتى تحتاج الى استبدال بعد ملء 100 000 وعاء .

المطلوب هو :

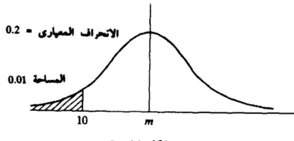
(أ) تعيين المستوى الذى يجب أن يوضح عنده متوسط الملء لكى يقابل النظام بدون استخدام التعديل .

(ب) نصح الادارة اذا كان التعديل يستحق الشراء .

(م م ت أ ـ المهنى ١ ـ مايو ١٩٧٨)

الاجابة

(أ) الشكل البيانى لهذا المطلوب موضحا كما فى شكل ١٤ ـ ٦ . نفرض أن متوسط الملء المطلوب وضعه بدون استخدام التعديل هو



شكل ١٤ ـ ٦

بالبحث فى جداول التوزيع الطبيعى ، نجد أن العدد الأكثر دقة الذى له المساحة 0.01 يقع خلفه 2.33 انحرافات معيارية من الوسط الحسابى . لذلك فى هذا المثال ، فإن القيمة 10 يجب أن تكون 2.33 انحرافات معيارية من m .

لهذا فإن $10 = m - 2.33 \times 0.2$ حيث قيمة الانحراف المعيارى هى 0.2 اذن

$$m = 10 + 0.466 = 10.466$$

متوسط الملء يجب أن يكون 10.466 لتر لكل وعاء .

(ب) الشكل البيانى لهذا المطلوب موضحا ، كما فى شكل ١٤ ـ ٧ . نفرض أن متوسط الملء المطلوب وضعه بالتعديل هو x ولنفس السبب كما فى اجابة الجزء (أ) نجد أن

$$x = 10 + 2.33 \times 0.15 = 10 + 0.3495 = 10.3495.$$

متوسط الملء يجب أن يكون 10.3495 لتر لكل وعاء . ولهذا فإنه فى 100 000 وعاء يكون عدد اللترات التى توافرت كنتيجة للتعديل هو فى المتوسط

$$100\,000 \times (10.466 - 10.3495) = 100\,000 \times 0.1165 = 11\,650$$ لترات

وكل لتر يوفر يباع بالقيمة 10 بنس وهذا يساوى $£11\,650 \times 0.1 = £1165$ وهذا يعتبر أقل من £ 5000 لكل 100 000 وعاء نحتاجه لتنفيذ التعديل ، وعلى ذلك تكون النصيحة للادارة هى أن هذا لايستحق الاهتمام .

تمرين ١٤ - ٦ - ١ : صاحب مصنع وجد أنه بالرغم من أنه وعد بتسليم وحدات معينة فى مدة 7 أسابيع ، فان الوقت الذى يأخذه لتسليم العملاء تقريبا له التوزيع الطبيعى بوسط حسابى 6 أسابيع وانحراف معيارى أسبوعين .

المطلوب :

١ - ماهى نسبة العملاء الذين يتسلمون وحداتهم متأخرة ؟

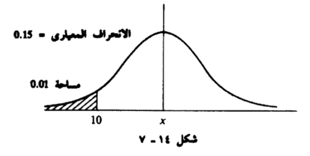
٢ - ماهى نسبة العملاء الذين يتسلمون وحداتهم من 4 إلى 7 أسابيع ؟

٣ - لأى صورة يجب أن يعدل اليها وعد التسليم اذا كان المطلوب أن 20% فقط من الوحدات يجب أن تتأخر ؟

٤ - ماهى نسبة العملاء الذين سوف يتسلمون وحداتهم خلال 5 أسابيع اذا انقص صاحب المصنع الانحراف المعيارى للتسليم إلى أسبوع واحد مع الاحتفاظ بمتوسط الزمن عند 6 أسابيع ؟

(ج م م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٥)

تركيبات التوزيعات الطبيعية : فى بعض الأحيان يكون من الضرورى ضم متغيرات عشوائية مستقلة كل منها له التوزيع الطبيعى مع بعضها . وأبسط تركيب هو جمع المتغيرات مع بعضها . سنبدأ بهذه الحالة ونشرحها باستخدام متغيرين عشوائيين . من السهل تعميم النتائج الى عدد أكبر من المتغيرات العشوائية . نفترض أن لدينا المتغير العشوائى X الذى له التوزيع الطبيعى بوسط μ_1 وانحراف معيارى σ_1 والمتغير العشوائى Y الذى له التوزيع الطبيعى بوسط μ_2 وانحراف معيارى σ_2 ؛ X و Y مستقلان . سنهتم بالمتغير الجديد $X + Y$.



شكل ١٤ - ٧

والشىء المهم فى المتغير $X + Y$ والذى يبدو واضحا أن $X + Y$ يتبع التوزيع الطبيعى . أهمية هذا بسبب أن هذه الظاهرة خاصة بالتوزيع الطبيعى ، كمثال ، اذا أضفنا متغيرين مستقلين لكل منهما توزيع ذى الحدين إلى بعضهما ، فإن الناتج لايكون له التوزيع ذى الحدين ، أو اذا أضفنا متغيرين مستقلين كل منهما له توزيع بواسون الى بعضهما ، فإن الناتج لايكون له عموما توزيع بواسون .

والآن اذا أضيف أى متغيرين مستقلين (دون النظر إلى توزيعهما) إلى بعضهما فان الوسط الحسابى للمجموع هو كما نتوقع مجموع الوسطين . لهذا فى هذه الحالة الوسط الحسابى للمتغير $X + Y$ هو $\mu_2 + \mu_1$.

أيضا اذا أضيف أى متغيرين مستقلين إلى بعضهما فإن تباين المجموع هو مجموع تباينهما . ولهذا ففى هذه الحالة فان تباين $X + Y$ هو $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ وبالتالى يكون الانحراف المعيارى للمتغير $X + Y$ هو : $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

الخلاصة : أن لدينا المتغير $X + Y$ له التوزيع الطبيعى بوسط حسابى $\mu_2 + \mu_1$ وانحراف معيارى

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

مثال ١٤ - ٦ - ٣ : تجميع ما لانتاج كميات كبيرة يتكون من ثلاث مركبات مختلفة . وزن كل مركبة له تقريبا التوزيع

الطبيعى بوسط حسابى وانحراف معيارى كما يلى :

مركبة	الوزن (بالأرطال) وسط	انحراف معيارى
A	3.0	0.2
B	2.5	0.2
C	6.0	0.4

المطلوب هو :

(١) ماهو نسبة التجميع التى
(أ) تزيد عن 11.8 رطل .
(ب) بين 11.4 و 11.7 رطل ؟
(٢) تجميع مايزيد أكثر من 11.8 رطل غير كاف واستبعد . عين وسيط الوزن للتجميع الكافى .
(ج م م - الأساس ب - ديسمبر ١٩٧٦)

الاجابة : هذا المثال يتطلب ثلاثة متغيرات مستقلة لها التوزيع الطبيعى ، وتضاف إلى بعضها .
نرمز لوزن المركبات B,A و C بالرموز $W_3\ W_2\ W_1$ على التوالى . لهذا فالمتغير الذى نهتم به هو : $W_1 + W_2 + W_3$. وبالنظر إلى ماسبق نرى أن $W_1 + W_2 + W_3$ له التوزيع الطبيعى بوسط حسابى : $0.3 + 2.5 + 6.0 = 11.5$ وانحراف معيارى

$$\sqrt{0.2^2 + 0.2^2 + 0.4^2} = \sqrt{0.24} = 0.49.$$

وبمعرفة هذا التوزيع نستطيع الاجابة عن الأسئلة المطلوبة .

(١) (أ)

$$\frac{11.8 - 11.5}{0.49} = \frac{0.3}{0.49} = 0.6$$

أى أن ، 11.8 تكون له 0.6 انحرافات معيارية عن الوسط الحسابى . والمساحة تحت منحنى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعى عند 0.6 انحرافات معيارية عن الوسط الحسابى من الجداول هى 0.274 ، أى أن 27.4% من التجميع يزن أكثر من 11.8 رطل .

(ب)

$$\frac{11.7 - 11.5}{0.49} = \frac{0.2}{0.49} = 0.4$$

والمساحة بعد 0.4 انحرافات معيارية عن الوسط الحسابى هى 0.3446 .

$$\frac{11.5 - 11.4}{0.49} = \frac{0.1}{0.49} = 0.2$$

والمساحة بعد 0.2 انحراف معيارى عن الوسط الحسابى هى 0.4207 ولهذا فان المساحة تحت المنحنى بين 11.4 و 11.7 هى $0.2347 = (0.4207 + 0.3446) - 1$ ، أى أن 23.47% من التجميعات يزن بين 11.4 و 11.7 رطل .

(٢) (أ)نرى من إجابة (أ) أن المساحة الكلية تحت 11.8 رطل هى $0.726 = 0.274 - 1$ فنصف هذا هو 0.363 ولذلك بالبحث عن الوسيط للوزن للتجميعات الكافية يتطلب الوزن الذى يختصر المساحة 0.363 فى الطرف

المنخفض.باستخدام الجداول العكسية نرى أن العدد الذى يختصر ذلك هو 0.35 انحراف معيارى تحت الوسط الحساب . أذن فى هذه الحالة تكون القيمة المطلوبة هى $11.5 - 0.35 \times 0.49 = 11.33$ ، أى أن وسيط الوزن للتجميعات الكافية هو 11.33 من الأرطال .

تمرين ١٤ - ٦ - ٢ : نوع خاص من الوحدات يتم انتاجه اولا على الماكينة A ثم على الماكينة B . والأزمنة التى تبدل فيها كل ماكينة مستقلة عن بعضها ، ولها التوزيع الطبيعى بوسط حسابى 10.4 ساعة وانحراف معيارى 1.2 ساعة بالنسبة للماكينة A وبوسط حسابى 12.6 ساعة وانحراف معيارى 1.8 ساعة بالنسبة للماكينة B ؟

المطلوب هو :

(١) ماهو الزمن الذى يأخذه انتاج وحدات متوسطة على الماكيتين A و B ؟
(٢) ماهى نسبة الشغل الذى يأخذ أكثر من 11 ساعة على A ؟
(٣) ماهى نسبة الشغل الذى يأخذ اكثر من 11 ساعة على A وأقل من 13 ساعة على B ؟
(٤) ماهى نسبة الشغل الذى يأخذ أكثر من الزمن المركب 25 ساعة على الماكينتين ؟

(ح م م - أساس ب - ديسمبر ١٩٧٦)

الصيغة العامة « للارتباط الخطى » لمتغيرين عشوائيين X و Y هى $aX + bY$ حيث أن a و b أى ثابتين . أيضا التعميم لأكثر من متغيرين ممكن . بالنظر إلى المجموع نجد أننا تناولنا الحالة الخاصة عندما $a = 1$ و $b = 1$.

إذا كان لدينا متغيران عشوائيان مستقلان ولهما التوزيع الطبيعى X (بوسط حسابى μ_1 وانحراف معيارى σ_1) و Y (بوسط حسابى μ_2 وانحراف معيارى σ_2) فإن $aX + bY$ له التوزيع الطبيعى بوسط حسابى $a\mu_1 + b\mu_2$ وانحراف معيارى $\sqrt{a^2\sigma_1{}^2 + b^2\sigma_2{}^2}$.

لاحظ أن ذلك يؤول الى الحالة السابقة عندما $a = 1$, $b = 1$.

مثال ١٤ - ٦ - ٤ : اسطوانات تنتج بطريقة معينة ، أطوالها تتبع التوزيع الطبيعى بوسط حسابى 30 مم . وانحراف معيارى 1.5 مم تثبت الاسطوانات على هيئة أزواج على مرآة . أوجد النسبة المئوية للاسطوانات الأربع الناتجة ظاهريا والتى لها الأطوال بين 118 مم و 122 مم .

الاجابة : نرمز لطول الاسطوانة السفلى بالرمز X ولطول الاسطوانة العليا بالرمز Y أذن الطول الظاهرى للاسطوانات الأربع هو $2X + 2Y$.

وهذا له التوزيع الطبيعى بوسط حسابى 120 مم $= 60 + 60 = 2\times30 + 30 \times 2$ وانحراف معيارى

$$\sqrt{2^2 \times 1.5^2 + 2^2 \times 1.5^2} = \sqrt{4 \times 2.25 + 4 \times 2.25} = \sqrt{18} = 4.2426 \text{ mm.}$$

$$\frac{122 - 120}{4.2426} = \frac{2}{4.2426} = 0.4714$$

والمساحة وراء هذا العدد من الانحرافات المعيارية عن الوسط الحسابى هى 0.3192 ، أى أن المساحة فوق 122 مم هى 0.3192 بالمثل المساحة أسفل 118 مم هى 0.3192 لهذا فان المساحة بين 118 و 122 هى $1 - 2\times 0.3192 = 0.3616$ والنسبة المئوية للاسطوانات الأربع الظاهرة ، والتى لها الأطوال فى المدى 118 مم الى 122 مم هى 36.16% .

تمرين ١٤ ـ ٦ ـ ٣ : قضيب اسطوانى لائق لدخول ثقب دائرى . الاثنان توزيعهما طبيعى وقطر القضيب له الوسط الحسابى 50.1 مم وانحراف معيارى 0.3 مم والثقب له الوسط الحسابى 51.1 مم وانحراف معيارى 0.4 مم فاذا اختيرت الوحدات عشوائيا لعملية التجميع فما هى نسبة الثقوب التى تكون غير لائقة (ارشاد : خذ $a = 1$, $b = -1$)

١٤ ـ ٧ تقريب التوزيع الطبيعى الى توزيع ذى الحدين

نفرض أن لدينا تجربة ذات حدين حيث عدد المحاولات لاجرائها n كبيرا واحتمال النجاح p فى كل محاولة يقترب من 0.5 لهذا التوزيع تقريبا متماثل . لذلك فان احتمالات ذات الحدين للحصول على عدد محدود من النجاح فى n من المحاولات يمكن تقريبها باستخدام التوزيع الطبيعى بنفس الوسط الحسابى والانحراف المعيارى ، كما فى توزيع ذات الحدين المناسب .

وننسق القيم المطلوبة لـ n و p لكى يكون التقريب معقولا ومناسبا ويمكن وصفه بالقول أن p يجب أن يكون فى المدى .

$$0.1 \leqslant p \leqslant 0.9$$

وأيضا كلا من $np > 5$ و $n(1-p) > 5$

فكلما كان p قريبا من 0.5 قلت الحاجة الملحة الى الحجم n للحصول على تقريب معقول .

وتقريب التوزيع الطبيعى الى توزيع ذات الحدين هو تقريب مفيد لأن جدول التوزيع الطبيعى يمكن استخدامه لأى مسألة لها توزيع طبيعى بينما جدول توزيع ذات الحدين يحتاج الى تقييد شديد . لذلك فان حل المسائل باستخدام توزيع ذات الحدين يماثل حساب كامل لاحتمالات ذات الحدين . وهذا ممكن أن يكون شاقا جدا .

وفى تقريب توزيع ذات الحدين بالتوزيع الطبيعى تنشأ صعوبة لاتحدث عند تقريب توزيع ذات الحدين بتوزيع بواسون فى البند ١٤ ـ ٤ . هذا ينتج من حقيقة أن توزيع ذات الحدين توزيع منفصل بينما التوزيع الطبيعى توزيع متصل . لذلك عند اعتبار تجربة ذات حدين فنتحدث عن احتمال الحصول على 3 مرات نجاح أو 4 مرات نجاح مثلا فى n من المحاولات ، لكن التوزيع الطبيعى ، كتوزيع متصل ، لايسمح لنا بالتحدث عن احتمالات قيم منفردة مثل توزيع ذات الحدين فبالأحرى أن نتكلم عن احتمالات مدى معين للقيم . والمعالجة لذلك هى النظر الى المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $m - ½$ و $m + ½$ (لأى عدد كلى m) كما لو كانت تنتمى للعدد الخاص m . لهذا اذا أردنا معرفة احتمال 3 مرات نجاح نوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين 2½ و 3½ .

وبالمثل p (3 نجاحات أو أكثر) يوجد بحساب المساحة تحت المنحنى الطبيعى فوق 2½ (لأن احتمال 3 متضمن) بينما p (أكثر من 3 نجاحات) يوجد بحساب المساحة تحت المنحنى الطبيعى فوق 3½ (لأن احتمال 3 ليس متضمنا) .

واضافة أو طرح ½ بالتخصيص ، فى مثل هذه الحالات يشير الى أن التصحيح المتصل ضرورى ، لأن التوزيع المنفصل يقرب إلى توزيع متصل .

مثال ١٤ ـ ٧ ـ ١ : كل عضو جديد يجند لاعداد موظفين لهيئة خاصة يستغرق فترة للتدريب ، ثم يؤدى اختبار لكى

يحدد أنه أهل للعمل الماهر . فاذا كان 80% من المجندين اجتازوا الاختبار فما هو احتمال أنه من بين مجموعة خاصة من 100 من المجندين فان 72 أو أقل سوف يجتازون الامتحان ؟

(م أ أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٣)

الاجابة : هو مجال ذات حدين حيث $n = 100$ و $p= 0.8$ والشروط المطلوبة لكى يكون التقريب الطبيعى صحيحا متحققا . كما يجب أن نستخدم التوزيع الطبيعى بوسط حسابى $np = 100 \times 0.8 = 80$ وانحراف معيارى

$$\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0.8 \times 0.2} = \sqrt{16} = 4.$$

ولكن تقريب احتمال 72 أو أقل ليجتازوا الاختبار فاننا نحتاج الى ايجاد المساحة تحت المنحنى الطبيعى تحت 72.5 . وهذا يشمل احتمال 72 .

$$\frac{80 - 72.5}{4} = \frac{7.5}{4} = 1.875$$

لهذا 72.5 له 1.875 انحراف معيارى تحت الوسط الحسابى . ومن الجداول نجد أن المساحة تحت المنحنى خلف 1.875 انحراف معيارى عن الوسط الحسابى هى 0.0301 أى أن P (أو أقل قد اجتازوا الاختبار) = 0.0301

تمرين ١٤ - ٧ - ١ : زمن وصول كاتب حسابات للعمل له التوزيع الطبيعى بوسط حسابى 08.55 ساعة ، والانحراف المعيارى 5 دقائق . وأزمنة الوصول فى مختلف الأيام مستقلة ، وزمن العمل الرسمى هو الساعة 09.00 ، وهناك 240 يوم عمل فى السنة . أوجد احتمال أنه وصل متأخرا مدة تزيد على 45 يوما فى سنة معلومة .

(م أ أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧٧)

تمارين

١٤ - ١ تشير سجلات البضائع الداخلة لأحد أقسام مصنع كبير إلى أن العدد المتوسط للوريات التى تصل كل أسبوع هو 248 . ومن المعلوم أن التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعى بانحراف معيارى 26 .

فاذا كان هذا النموذج للوصول مستمرا ، فما هى النسبة المئوية لعدد الأسابيع المتوقفة للحصول على عدد نقلات .

(١) اقل من 229 كل أسبوع ؟

(٢) أكثر من 280 كل أسبوع ؟

(م م ت أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٥)

١٤ - ٢ عند اختبار ممرضات للعمل فى مستشفى فان المتوقع أن 50% من المتقدمات سوف يتم تدريبهن ، ويحصلن على اللياقة الفنية المناسبة . ماهو احتمال أن

(١) من بين مجموعة من 5 مجندات ، أن 3 أو أكثر سوف يفشلن فى اللياقة ؟

(٢) من بين مجموعة من 25 مجندة ، أن 15 أو أكثر سيفشلن فى اللياقة ؟

(٣) من بين أربع مجموعات متتالية من 25 مجندة ، أن 15 أو أكثر فى كل مجموعة سيفشلن فى اللياقة ؟

(٤) من بين مجموعة من 100 مجندة ، أن 60 أو أكثر سيفشلن فى اللياقة ؟

ملاحظة : استخدم طريقة التقريب فى الحساب اذا كانت مناسبة .

(م أ أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٤)

١٤ - ٣ كجزء احصائى من دراسة أحد الأمراض ، وجد أن 100 مريض يحتاجون الى استشارة طبيب العائلة عدة مرات خلال الاثنى عشر شهرا الماضية . وأعداد المرضى الذين لهم 3,2,1,0 و 4 أو أكثر من الاستشارات هى على التوالى 8,10,16,46 و 20 وقد اقترح أن هذه الاستشارات تتبع عملية بواسون بمعدل تغير λ (لكل سنة) .

فاذا كان هذا الاقتراح صحيحا ، فاكتب تعبيرات بدلالة λ للنسب المتوقعة للمرضى الذين يحتاجون الى 3,2,1,0 و 4 أو أكثر من الاستشارات

(١) سنويا .

(٢) لفترة تزيد على سنتين .

(م أ أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧٥)

١٤ - ٤ الخريجون المرشحون للعمل فى منظمة ما يقضون فترة زمنية قصيرة فى كل قسم رئيسى وتبعا لتقدمهم يرسلون للتدريب على برنامج فى الادارة واذا اجتازوا هذه الدورة بنجاح فانهم يعينون فى وظائف ثابته ، ومن التجارب السابقة وجد أن 20 فى المائة من المرشحين ترفض خلال الفترة التى يقضونها فى الأقسام و 75 فى المائة من المتبقين لايجتازون الدورة التدريبية . بفرض أنه يرشح شخص واحد فى المرة لشغل مكان (المشرح فى الدورة التدريبية يعتبر شاغلا لمكان) وان تقدم المرشح لايتأثر بتقدم الذين سبقوه ، استنبط تعبيرات لاحتمال الأحداث التالية :

(أ) سبعة من العشرة المرشحين يأخذون وظيفة ثابتة .

(ب) على الأقل واحد من العشرة المرشحين يأخذ وظيفة ثابتة .

(م أ أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧٥)

الفصل الخامس عشر

التقدير

١٥ - ١ توزيع المعاينة للوسط

هناك أحوال كثيرة يتعذر فيها فحص كل القيم فى المجتمع . وبالتالى من المعقول أخذ عينة من هذا المجتمع وعمل بعض البيانات الاستدلالية عن هذا المجتمع . ومن المتوقع حدوث بعض الخطأ بسبب أنه ليست جميع قيم المجتمع لايمكن مشاهدتها ولكن وبحذر يمكن أن يكون هذا الخطأ بسيطا . وقد سبق شرح طرق عديدة لأخذ عينات من مجتمع ما فى الفصل الخامس . وفى هذا الفصل والفصول التالية نفترض أن العينة يتم إختيارها عشوائيا ، أى أن كل عضو فى المجتمع له نفس الفرصة لأن ينتمى الى العينة .

نفترض أنه لدينا عينة مكونة من n من المشاهدات x_1 , x_2 , ... ، و x_n مأخوذة من مجتمع ما . وليكن الوسط الحسابى لهذه العينة هو $\bar{x}_1 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n = (\Sigma x)/n$ نفترض أننا أخذنا عينات أخرى من نفس المجتمع . وحسبنا الوسط الحسابى لكل من هذه العينات ، بهذه الطريقة يكون $\bar{x}_2$ هو الوسط الحسابى للعينة الثانية ، $\bar{x}_3$ هو الوسط الحسابى للعينة الثالثة وهكذا . نرى أن الوسط الحسابى للعينة له توزيع يشار اليه بتوزيع المعاينة للوسط .

نفرض أن الوسط الحسابى للمجتمع هو μ وتباينة σ^2 وأن عينة عشوائية x_1 ، x_2 ، ...... ، x_n أخذت من هذا المجتمع فكما أخترنا العينة عشوائيا ، فان القيم التى عددها n يمكن اعتبارها متغيرات عشوائية مستقلة بحيث أن وسطها μ وتباينها σ^2 لذلك .

$$\text{الوسط الحسابى لـ } \bar{x} = \frac{\text{وسط}(x_1) + \text{وسط}(x_2) + \ldots + \text{وسط}(x_n)}{n}$$

$$= \frac{\mu + \mu + \ldots + \mu}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

و

$$\text{التباين لـ } \bar{x} = \frac{\text{تباين}(x_1) + \text{تباين}(x_2) + \ldots + \text{تباين}(x_n)}{n^2}$$

وبما أن كل القيم x مستقلة عن بعضها . فإن

$$\text{التباين لـ } (\bar{x}) = \frac{(\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

هذه النتائج فى الحقيقة هى أمتداد للنتائج فى البند ١٤ ـ ٦ الخاص بتجميعات التوزيعات الطبيعية .

ولذا فاننا نستنتج أن توزيع المعاينة للوسط الحسابى لعينة من n من المشاهدات مأخوذة من مجتمع وسطه μ وتباينه σ^2 لها الوسط μ وتباينه σ^2/n ، والانحراف المعيارى لأوساط العينة ، $\sigma/\sqrt{n}$ ، غالبا مايسمى الخطأ المعيارى للوسط . إذا كان متجمعا بالاضافة الى أن له μ و σ^2 كوسط وتباين ، له التوزيع الطبيعى ، فان توزيع المعاينة للوسط هو أيضا طبيعى (بوسط μ وتباين σ^2/n) . من هذه النتائج نرى أنه كلما كانت n كبيرة ، كان تباين وسط العينة صغيرا ، ولذلك فان أقرب قيمة الى μ نتوقعها هى $\bar{x}$. وشكل ١٥ ـ ٥ يوضح هذه النقطة .

مثال ١٥ ـ ١ ـ ١ وحدات مصنعة لوزن متوسط 3 1bs وانحراف معيارى 0.05 1bs . علب كرتون كل منها يحتوى تسع وحدات تباع على أن الوزن المتوسط للوحدات فى الكرتونة لايقل عن 2.97 1bs . والعلب الكرتون التى لاتحقق ذلك ترفض .

المطلوب :

(١) حساب نسبة العلب التى ترفض .
(٢) نفرض الان أن النسبة المرفوضة يمكن تغييرها بادخال التحسين بحيث أن الوزن المتوسط لكل الوحدات يزيد الى 3.01 1bs . وهذا التعديل يكلف £0.36 لكل علبة كرتون كاملة . إذا كانت تكاليف كرتونة مرفوضة هو £10 أحسب ما إذا كان التعديل مرغوبا فيه اقتصاديا .

(ج م م ـ الأساس ب ـ يونيو ١٩٧٨)

الاجابة :

(١) من المناسب أن نفرض أن وزن الوحدات له تقريبا التوزيع الطبيعى ، ولذلك نستطيع أن نفرض مطمئنين أن الوزن المتوسط لتسع وحدات فى الكرتونة له التوزيع الطبيعى بوسط μ = 3 1bs وانحراف معيارى .

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.05}{\sqrt{9}} = 0.0167 \text{ lb}$$

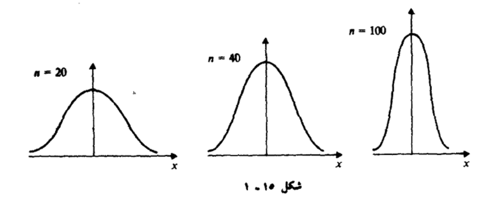
كما أن

$$\frac{3 - 2.97}{0.0167} = 1.80$$

ومن جداول التوزيع الطبيعى فى ملحق الكتاب رقم 2 نرى أن 3.59% من الكرتونات مرفوضة .

(٢) اذا تغيرت μ الى 3.01 1bs فان

$$\frac{3.01 - 2.97}{0.0167} = 2.40$$



شكل ١٥ ـ ١

النسبة المئوية الجديدة للرفض هى 0.82% . وبالتالى هناك استنتاج أن 2.77% من الكرتونات مرفوضة . حيث أن تكاليف الكرتونة المرفوضة هو 10£ فإن القيمة المتوقعة للتوفير عن كل كرتونة هى فقط 27.7 بنس مقارنة بـ 36 بنس للتعديل لهذا فإن التعديل غير مرغوب فيه اقتصاديا .

ذكرنا فى الفصل السابق أنه إذا أخذنا عينات عشوائية كبيرة لمتغير له أى توزيع فان متوسطات العينة لها تقريبا التوزيع الطبيعى ، الان نصيغ هذا التقرير كنظرية الحد المركزى .

نظرية الحد المركزى

اذا أخذت عينات متعددة لها الحجم n من مجتمع له الوسط μ وتباين σ^2 فانه إذا كانت n كبيرة ، يكون توزيع متوسط العينة $\bar{x}$ تقريبا هو التوزيع الطبيعى بوسط μ وتباين σ^2/n وهذا التقريب يكون أفضل كلما زادت n .

ماذا نقصد بكبر n فى هذه النظرية ؟ الاجابة على ذلك ليست سهلة ، كما أنها تعتمد على قرب المجتمع من التوزيع الطبيعى وعادة تكون n أكبر من 30 شرط كاف .

لاحظ أنه لايوجد دلالة على توزيع قيم المجتمع تحت الدراسة فى نظرية الحد المركزى أنها تؤكد أن التوزيع الطبيعى هو أكثر توزيع احتمالى هام . كثيرا من التكنيكات الاحصائية تشير إلى استخدام التوزيع الطبيعى خاصة خلال نظرية الحد المركزى .

مثال ١٥ ـ ١ ـ ٢ : أعمار نوع خاص من بطاريات العربات معروف أنها من توزيع بوسط 30 شهرا ، وانحراف معيارى 9 شهور . احسب توزيع المعاينة لعينة عشوائية مكونة من 36 من مثل هذه البطاريات . استنتج أيضا أن احتمال متوسط هذه العينة لـ 36 بطارية عربة يكون أكبر من 32 شهرا .

الاجابة : فى هذا المثال لانعلم توزيع أعمار البطاريات تحت الدراسة . ومع ذلك فهى مسألة بسيطة جدا بسبب نظرية الحد المركزى . فى الحقيقة أن توزيع الأعمار هو تقريبا التوزيع الطبيعى ، لهذا ، فإن $n = 36$ هى بالتأكيد كبيرة كبرا كافيا لأن نقول أن $\bar{x}$ له التوزيع الطبيعى بوسط يساوى 30 وخطأ معيارى يساوى 1.5 ($9/\sqrt{36} =$) . كما أن $1.33 = 1.5 / (30 - 32)$ نرى من جداول التوزيع الطبيعى المعيارى أن ، الاحتمال المطلوب هو 0.09 .

توزيع المعاينة للنسب : فى النواحى المالية ، فإنه من الضرورى غالبا اعتبار بيانات وصفيه فمثلا لحساب نسبة الفواتير أعلى من £25 أو لإيجاد تكلفة الطلبات الخاطئة . نفرض أن لدينا مجتمعا يحتوى على نسبة p من الوحدات التى لها صفة ذات أهمية (مثلا معيبة) . إذا أخذت عينات عديدة ذات حجم n ولكل عينة نحسب نسبة العينة $\hat{p}$ للمعيب فيها ، فانه بطريقة مماثلة للطريقة التى استخدمت فى متوسطات العينة يجب أن نستخدم نظرية الحد المركزى للحصول على التقرير التالى

عندما تكون n كبيرة p ليست قريبة من صفر ، أو واحد ، فان p لها تقريبا التوزيع الطبيعى بوسط p وتباين $p(1 - p)/n$.

ومرة أخرى فإن القيود على n و p ليست نوعية جدا . قاعدة الابهام هى أن كلا من np و $n(1 - p)$ أكبر من 5 كما وصف فى البند ١٤ ـ ٧ .

مثال ١٥ ـ ١ ـ ٣ : عندما اعطى علاج لمرضى يتألمون من مرض كانت احتمال نسبة الشفاء هى 0.8 فإذا أعطى العلاج لعينة عشوائية من 64 من المرضى يقاسون من المرض ،

١ ـ فما هو الوسط والانحراف المعيارى لنسبة الشفاء للمرضى ؟

٢ ـ ماهو احتمال أن أقل من 50 مريضا تم شفاؤهم ؟

الاجابة :

١ ـ فى هذا المثال نعرف أن $p = 0.8$ وأن $n = 64$ لذلك فان نسبة العينة لها الوسط $p = 0.8$ ، وانحراف معيارى

$$\sqrt{p(1-p)/n} = \sqrt{(0.8 \times 0.2)/64} = 0.05$$

٢ ـ هذا الجزء من السؤال هو ببساطة تطبيق لتقريب التوزيع الطبيعى الى توزيع ذات الحدين ، كما وصف فى البند ١٤ ـ ٧ . وبما أن

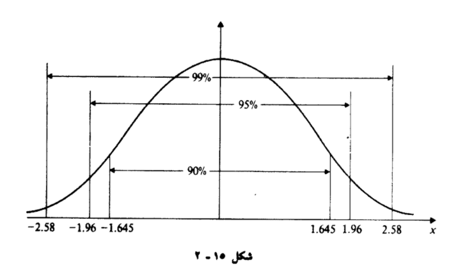
$$\frac{49.5 - (64 \times 0.8)}{\sqrt{(64 \times 0.8 \times 0.2)}} = \frac{-1.7}{3.2} = -0.53$$

فاننا نحتاج إلى المساحة تحت المنحنى الطبيعى أكثر من 0.53 انحرافات معيارية تحت الوسط . المساحة هى 0.298 .

قبل أن نتعمق كثيرا فى التقدير نعتبر باختصار المنحنى الطبيعى المعيارى ، كما هو مجدول فى ملحق الكتاب رقم ٢ . بملاحظة هذه الجداول نستطيع أن نرى أن 95% تماما من المساحة تحت المنحنى الطبيعى تقع ضمن 1.96 انحرافات معيارية للوسط . بطريقة مماثلة نستطيع أن نرى أن 90% من المساحة تقع ضمن 1.645 انحرافات معيارية، 99% تقع ضمن 2.88 انحرافات معيارية للوسط . هذه النتائج موضحة فى شكل ١٥ ـ ٢ القيم (2.58, 1.645 و 1.96) ستظهر بوضوح فى الفصول القادمة ويجب العلم بها الإن . لأنها ستوفر كثيرا من الجهد فيما بعد .

تمرين ١٥ - ١ - ١ : وزن نبات من القمح فى حزمة معيارية له التوزيع الطبيعى بوسط 502 g وانحراف معيارى 3.75 g اختيرت عينات عشوائية من 16 حزمة .

١ - احسب الوسط والانحراف المعيارى لمتوسط الوزن للقمح فى كل حزمة فى عينة عشوائية من 16 حزمة .
٢ - أوجد تقدير إحتمال أن عينة ستنتج فى المتوسط أقل من 500 g .



شكل ١٥ - ٢

١٥ - ٢ تقدير بارامترات المجتمع

عندما نستخدم البيانات عن عينة لتدلنا على شىء ما عن المجتمع المأخوذ منه العينة فإن الشىء الوحيد الذى نكون متأكدين منه هو أنه ليس لدينا كل الحقائق عن المجتمع . ولهذا فانه من الضرورى أن نتقدم بطريقة عملية حتى يمكننا الحصول على درجة أعلى من الثقة فى أن الحقيقة تقع ضمن حدود معينة . فى هذا الجزء نريد أن نحاول أن نقرر القيم العددية للبارامترات للمجتمع تحت الدراسة ، على أساس بيانات العينة الميسرة لنا .

تقدير النقطة : تقدير نقطة هو عدد نحصل عليه من حسابات على بيانات العينة المشاهدة وهو يستخدم كتقريب لبارامتر المجتمع تحت الدراسة . هناك عدد من الخواص المرغوب فى أن تتصف بها تقديرات النقطة ، التى تجعل تقدير أحد الأشخاص أفضل من أى من الاخرين . التقديرات العادية هى :

١ - اذا كان الوسط μ للمجتمع غير معلوم ، فإن وسط العينة ، $\bar{x} = (\Sigma x)/n$ هو تقدير مناسب ، أى أن $\bar{x} = \hat{\mu}$.

٢ - اذا كانت نسبة المجتمع p غير معلومة ، فان نسبة العينة $\hat{p}$ هى أكثر تقدير مناسب .

٣ - إذا كان تباين المجتمع σ^2 غير معلوم ، فان أكثر تقدير مناسب هو $\hat{\sigma}^2 = \Sigma (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)$ هذه نتيجة قد تبدو غريبة للقارىء ، بينما القيمة الأكثر وضوحا $s^2 = (x_i - x)^2 / n$ تؤدى دائما الى بخس تباين المجتمع σ^2 ولهذا فهى قيمة منحازة . هذا ليس الحال مع $\hat{\sigma}^2$ بنفس الطريقة $\hat{\sigma}$ هو أكثر تقدير مناسب للانحراف المعيارى للمجتمع غير معلوم الانحراف المعيارى σ . لاحظ أنه عندما تكون n حجم العينة ، كبيرة يكون هناك فرق قليل بين القيم المحسوبة لـ $\hat{\sigma}$, s .عموما ، التعبير « انحراف العينة المعيارى » يستخدم للدلالة على s .

مثال ١٥ ـ ٢ ـ ١ : عينة من 20 فاتورة اختيرت من مجتمع كبير .

12.53	22.27	13.38	51.47	8.05	24.11	43.48	15.27	50.97	8.06
11.47	58.00	43.16	19.05	22.20	62.93	32.04	26.78	38.07	45.11

أوجد تقديرات النقطة لما يأتى :

١ ـ متوسط المجتمع ،

٢ ـ نسبة المجتمع لقيمة الفواتير أكثر من £50 ،

٣ ـ الانحراف المعيارى للمجتمع .

الاجابة: من البيانات نجد أن $\Sigma x = 608.40$ وأن $\Sigma x^2 = 24082.884$.

١ ـ تقديرنا لمتوسط المجتمع هو

$$\hat{\mu} = \frac{608.40}{20} = £30.42$$

٢ ـ حيث يوجد 4 قيم من بين قيم العينة الـ 20 أكبر من £50 فإن تقدير النقطة لنسبة المجتمع هو $\hat{p} = 4/20 = 0.2$.

٣ ـ تقديرنا للانحراف المعيارى للمجتمع هو

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(\Sigma x^2 - n\bar{x}^2)}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{19}(24\,082.884 - 30.42 \times 608.40)}$$
$$= £17.13$$

فترة التقدير : فترة التقدير هى فترة تتحدد بقيمتين نحصل عليها من حسابات على قيم العينة المشاهدة ، ويتوقع أن تحتوى على القيمة الحقيقية للبارامتر غير المعلوم فى داخلها اعتبر المثال التالى :

مثال ١٥ ـ ٢ ـ ٢ : أراد كاتب حسابات أن يفحص مواعيد استحقاق الديون للدفع . فوجد من التجربة أن مواعيد الدفع لها التوزيع الطبيعى التقريبى بإنحراف معيارى 10 أيام واذا كانت مواعيد الدفع طويلة ، فان الشركة تكون مهددة فى السيولة النقدية ، وبالتالى من المهم أن يوجد تقدير دقيق لمتوسط مواعيد الدفع . لعمل ذلك أخذ المحاسب عينة من 25 فاتورة من السنة الماضية فى المعاملة ، أوجد الوسط $\bar{x} = 44$ يوما ، كيف يكون $\bar{x}$ دقيقا كنقطة تقدير لمتوسط المجتمع μ ؟

الاجابة : نعلم أن احتمال ان متغير له التوزيع الطبيعى سيأخذ قيمة ضمن 1.96 انحرافات معيارية للوسط هو 0.95 ، ولاننا نعرف أن $\bar{x}$ له التوزيع الطبيعى بوسط μ ، وانحراف معيارى $\sigma/\sqrt{n}$, ينتج أن

$$P\left(-1.96 < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < +1.96\right) = 0.95$$

ولهذا

$$P\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < +1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

وفى المثال $\sigma = 10$ و $n = 25$ وبالتالى $\sigma/\sqrt{n} = 2$ وعليه فان

$$P(-3.92 < \bar{x} - \mu < +3.92) = 0.95$$

كاتب الحسابات يشعر بثقة تامة أن متوسط العينة $\bar{x} = 44$ يختلف عن قيمة المجتمع μ بأقل من 3.92 يوما . قيمة الفرق تسمى بخطأ التقدير ، ويمكن التعبير عنه فقط بدلالة الاحتمال حيث أن μ غير معلومة .

ماهى 95% فترة الثقة لـ μ على أساس أن العينة الابتدائية مكونة من 25؟ نرى أن

$$P(\mu - 3.92 < \bar{x} < \mu + 3.92) = 0.95$$

أو

$$P(\bar{x} - 3.92 < \mu < \bar{x} + 3.92) = 0.95$$

نطلق على الفترة $(\bar{x} - 3.92\ ,\ \bar{x} + 3.92)$ أو $(40.08\ ,\ 47.92)$ أنها 95% فترة ثقة لـ μ والنقط النهائية للفترة تسمى حدود الثقة لـ μ .

كحالة عامة ينتج أنه اذا كان المجتمع له التوزيع الطبيعى التقريبى فان.

$$P\left(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

ولهذا ، فان 95% فترة الثقة العامة تأخذ الصورة

$$\left(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

هذا التقرير يخبرنا بأنه على المدى الطويل من أخذ عينات عشوائية مكررة ذات حجم n من مجتمع ما فان 95% من زمن فترة الثقة تشتمل على μ .

فى هذا الجزء نتعامل فقط بالمجتمعات ذات التوزيع الطبيعى . على أن ، نظرية الحد المركزى تجعل هذا القيد غير ضرورى عندما يكون حجم العينة كبيرا .

مثال ١٥ ـ ٢ ـ ٣ : المتوسط المطلوب للزمن بالأيام لتسليم الطلبات بشركة كهرباء يحتاج الى تقدير . اختيرت عينه من 60 من الطلبات عشوائيا من معاملة تجارية حديثة . متوسط العينة هو 5.9 يوم . $\hat{\sigma}$ ، تقدير العينة لانحراف المعيارى للمجتمع ، هو 1.7 يوم . احسب 95% فترة ثقة لتقدير أزمنة التسليم .

الاجابة: 95% فترة ثقة لـ μ تأخذ الصورة

$$\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{الى} \quad \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

كما سبق أن رأينا . على أن ، الانحراف المعيارى للمجتمع ، σ ، غير معلوم . لحسن الحظ ، عندما تكون n كبيرة ، لانتعرض لخطأ كبير باستخدام تقدير غير منحاز ، $\hat{\sigma}$ كبديل . لهذا تستخدم

$$\bar{x} - 1.96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \quad \text{الى} \quad \bar{x} + 1.96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

سنرى فى البند ١٥ ـ ٣ أننا لانستطيع استخدام هذا التقريب عندما تكون n صغيرة (أقل من 30) . فى المثال السابق تكون فترة الثقة

$$5.9 - 1.96 \times \frac{1.7}{\sqrt{60}} \quad \text{الى} \quad 5.9 + 1.96 \times \frac{1.7}{\sqrt{60}}$$

من 5.47 الى 6.33

أى أن

يجب ملاحظة أن 95% فترة ثقة غير مناسب للموقف فى هذا السؤال ، فمثلا 99% فترة ثقة (على الصورة $\bar{x} \pm 2.58\ \sigma/\sqrt{n}$) أو 90% فترة ثقة (على الصورة $\bar{x} \pm 1.645\ \sigma/\sqrt{n}$) من الممكن تفضيلها . نرى أن الفترة تتسع كلما نزيد من مستوى الثقة . وعلى العكس نستطيع أن نصغر فترة الثقة بتغيير درجة الثقة .

مثال ١٥ ـ ٢ ـ ٤ : فى أثناء مراجعة الحسابات شوهدت عينة عشوائية من 50 فاتورة من مجتمع كبير . حسبت قيمة متوسط العينة فوجدت £52.40 والانحراف المعيارى £5.60 .

قدر الخطأ المعيارى للمتوسط ، واحسب 90% فترة ثقة للمتوسط الحقيقى للمجتمع .

الاجابة يقدر الخطأ المعيارى للمتوسط بالقيمة $\hat{\sigma}/\sqrt{n}$. لم تكن لدينا قيمة σ ولكن لدينا القيمة s . على ذلك .

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}\ .$$

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{5.60}{7} = 0.80$$

فان هذا المقياس يمكن استخدامه الآن فى ايجاد تقدير لفترة متوسط المجتمع . يمكن حساب 90% فترة ثقة كما يأتى :

$$52.40 - (1.645 \times 0.80) \quad \text{إلى} \quad 52.40 + (1.645 \times 0.80)$$

أى أن من £51.08 الى £53.72

نفرض أننا لم نتحقق من دقة هذا التقدير . كيف يمكننا أن نتأكد بصورة معقولة من أنه باستخدام عينة اضافية كبيرة ، باحتمال 0.90 مثلا ، أن التقدير لايكون خاطئا بأكثر من 1 £؟

كلما زاد حجم العينة ، فإن الخطأ المعيارى يقل . حيث أن 90% من المساحة المركزية لمنحنى التوزيع الطبيعى تقابل 1.645 انحرافات معيارية على جانبى μ وعلية فان n يجب أن تحقق المعادلة

$$1.645 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 1$$

أى أن

$$n = (1.645\ \hat{\sigma})^2 = (1.645 \times 0.80 \times \sqrt{50})^2$$
$$= 86.6$$

أي أن المطلوب عينة اضافية من 37 .

بطريقة مماثلة لمتوسط المجتمع غالبا مانريد حساب تقدير فترة لنسبة المجتمع ، p . باستخدام النتيجة فى البند ١٥ - ١ من أن نسبة العينة $\hat{p}$ لها التوزيع الطبيعى بوسط p وانحراف معيارى $\sqrt{p(1-p)/n}$. بشرط أن n كبيرة كبرا مناسبا ، .وأن p لاتقترب من الصفر ، أو الواحد ، فاننا نتوقع أن تكون 95% فترة الثقة تكون

$$\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{إلى} \quad \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{p}}$$

لسوء الحظ ، هذه الفترة تعتمد على p أيضا ، وهى بالطبع غير معلومة . ومع ذلك قربنا p إلى $\hat{p}$،فان 95% فترة ثقة تقريبية لـ p تكون

$$\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad \text{إلى} \quad \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

مثال ١٥ - ٢ - ٥ : أخذت عينة عشوائية من 200 من مجتمع كبير من الحسابات من هذه العينة وجد أن 18 بهم بعض الشذوذ . أوجد 95% فترة ثقة للنسبة الحقيقية للأخطاء بين هذه الحسابات .

الاجابة:نسبة العينة $\hat{p}$ هى $\hat{p} = 18/200 = 0.09$.لهذا فان الخطأ المعيارى للنسبة يقدر بالآتى :

$$\sqrt{\frac{0.09 \times 0.91}{200}} = 0.0202$$

95% فترة ثقة لـ p هى

$$0.09 - (1.96 \times 0.0202) \quad \text{إلى} \quad 0.09 + (1.96 \times 0.0202)$$

أى أن من 0.050 الى 0.130

نثق باحتمال 95% أن النسبة الحقيقية للحسابات الخطأ تقع بين 0.05 و 0.13 .

تمرين ١٥ - ٢ - ١ : من عينة عشوائية مكونة من 400 محاسب ماهر ، متوسط الراتب السنوى كان 000 12£ والانحراف المعيارى 3000£ . أحسب الخطأ المعيارى للمتوسط ، أوجد 99% فترة ثقة لمتوسط الراتب لكل محاسب ماهر .

تمرين ١٥ - ٢ - ٢ : فى عينة عشوائية من 250 شخص لجأوا الى سلفة مالية من شركة ، 40 رفضوا . أوجد 95% فترة ثقة للنسبة الصحيحة لهؤلاء الذين لم يتسلموا السلفة .

١٥ - ٣ تقدير العينة الصغيرة

اعتدنا سابقا ، بمعلومية حجم عينة n أن النتيجة $(\bar{x}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ لها التوزيع الطبيعى المعيارى للحصول على حدود الثقة لمتوسط المجتمع ، μ.كما رأينا سابقا σ غالبا ما تكون غير معلومة ونحتاج إلى تقديرها بتقدير غير متحيز ، $\hat{\sigma}$ هذا يعطى نتائج جيده فى حالة العينات الكبيرة ، ولكن فترات الثقة تكون ضيقة للغاية عندما تكون n صغيرة ولتجنب الخطأ الناتج عن ابدال σ بـ $\hat{\sigma}$ عندما يكون لدينا حجم صغير للعينة ، نقدم توزيع جديد يسمى بتوزيع ستيودنت أو توزيع - t .

بحث جوست W.S.Gosset (احصائى يكتب تحت اسم'Student') مشكلة تحديد التوزيع المضبوط للمتغير

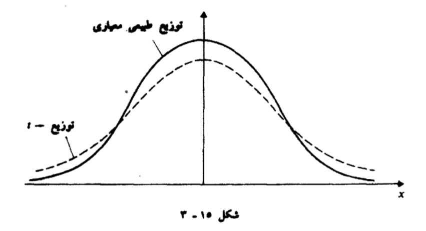
$$\frac{\bar{x}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

فى عينات من التوزيع الطبيعى . توزيع — t (كما هو مجدول فى الملحق الثانى للكتاب) يكون صحيحا عندما يكون المجتمع تحت الدراسة له التوزيع الطبيعى وبخلاف ذلك يكون مقربا « للتوزيع الطبيعى » وأكثر من ذلك ، فان توزيع - t يشبه التوزيع الطبيعى المعيارى ، أى يماثله ، ولكنه انتشارا ، كما هو موضح فى شكل ١٥ - ٣ .

الجداول تعطى قيما لتوزيع — t المناظرة لما يسمى « درجات الحرية » ويرمز لها بالرمز υ ، واحتمالات مختلفة . فى هذه الحالة $\upsilon = n - 1$ أى أقل من حجم العينة بواحد ، تقابل استخدام المقسوم عليه $n - 1$ بدلا من n فى ايجاد الانحراف المعيارى . نعرف أنه فى حالة التوزيع الطبيعى المعيارى ، فان 95% من المجتمع يقع بين 1.96 ± . النقط المناظرة فى حالة توزيع — t هى

υ	قيمة — t
3	3.18
10	2.23
30	2.04
∞	1.96

يتماثل توزيع — t مع التوزيع الطبيعى المعيارى لعدد لانهائى من درجات الحرية . اذا كانت n أكبر من 30 فمن الأفضل استخدام التوزيع الطبيعى المعيارى . سنوضح استخدامه بالمثالين الآتيين :



شكل ١٥ - ٣

مثال ١٥ - ٣ - ١ : انت تريد أن نفرض ضرائب على القيمة الكلية للوحدات المباعة ، والتى عددها 900 فى دفتر الحسابات الجارية . ونتيجة لضيق الوقت المتاح لاتستطيع فحص كل وحدة فى الدفتر ولكن تأخذ عينة عشوائية من 2% من الوحدات . القيم التى اختيرت وعددها 18 هى

£	£	£	£	£	£
45	58	49	70	38	80
38	15	50	40	45	75
35	43	100	44	41	34

المطلوب :

١ - تقدر الوسط والانحراف المعيارى للمجتمع .

٢ - تعطى نقطة تقدير لعدد الوحدات الكلى 900 .

٣ - توجد 95% فترة ثقة للقيمة الكلية للأعداد 900 .

الاجابة :

١ - التقديرات غير المتميزة لـ μ و σ هى

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{900}{18} = £50$$

و

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}(\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2)} = \sqrt{\frac{1}{17}(51\,800 - 45\,000)} = £20$$

٢ - نقطة التقدير للقيمة الكلية يساوى 50 × 900 = 00 45 £

٣ - 95% فترة ثقة لـ μ تأخذ الصورة

$$\bar{x} \pm t\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

حيث t هى قيمة توزيع -t بدرجات حرية 17 = 1 — 18 . من الملحق الثانى للكتاب نجد أن قيمة t المطلوبة 2.11 . ولهذا فإن 95% فترة ثقة لـ μ هى

$$50 - \frac{2.11 \times 20}{\sqrt{18}} \quad \text{إلى} \quad 50 + \frac{2.11 \times 20}{\sqrt{18}}$$

أو من £40.05 إلى £59.95

نستطيع الان الحصول على 95% فترة ثقة للقيمة الكلية للمجتمع بضرب كل حد فى عدد القيم فى المجتمع 900 هنا £36 045 = 900 × 40.05 و £53 955 = 900 × 59.95 . ولهذا تكون حدود الثقة للقيمة الكلية هى £36 045 و £35 955 .

مثال ١٥ ـ ٣ ـ ٢ : من عينة عشوائية من 9 مكونات لآلة ، يتوقع أن متوسط العمر هو 15 شهرا بانحراف معيارى 2 شهر . على أساس هذه العينة احسب الحدود التى يتغير بينها متوسط العمر الحقيقى عند 95% و 99% حدود ثقة . (م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٤)

الاجابة: الخطأ المعيارى للوسط يساوى $\sigma/\sqrt{n} = 2/\sqrt{8} = 0.7071$. لايجاد قيم t الصحيحة نلاحظ أن $\upsilon = 9 - 1 = 8$, 95% فترة ثقة لمتوسط العمر الحقيقى هى

$$15 - 2.31 \times 0.7071 \quad \text{إلى} \quad 15 + 2.31 \times 0.7071$$

أو من 13.4 الى 16.6 شهور

99% فترة ثقة المماثلة هى

$$15 - 3.36 \times 0.7071 \quad \text{إلى} \quad 15 + 3.36 \times 0.7071$$

أو من 12.6 إلى 17.4 شهور

تمرين ١٥ ـ ٣ ـ ١ : عينة ذات حجم 16 من مجتمع له التوزيع الطبيعى تنتج قيم العينة $\bar{x} = 14.5$, $s = 5$. أوجد 95% حدود ثقة لمتوسط المجتمع μ .

تمارين

١٥ ـ ١ مصنع به عشر ماكينات حفر متماثلة مرقمة من 7601 الى 7610 . ملخص تسجيلات قسم الصيانة لعام 1976 يظهر فى جدول أيام أعطال الالات كما يلى :

أيام التعطيل	رقم الماكينات
15	7601
16	7602
18	7603
13	7604
21	7605
14	7606
15	7607
17	7608
23	7609
18	7610

المطلوب ذكر العدد المتوسط المتوقع لأيام الأعطال عام 1977 . ضع 95% حدود ثقة على هذا المتوسط .
(م م ت أ - المهنى ١ - مايو ١٩٧٧)

١٥ - ٢ تكتشف المهارة يدوية للمجندين لاحدى المؤسسات بواسطة اختبار معيارى . النتائج المسجلة تتبع التوزيع الطبيعى أو توزيع جاوس بانحراف معيارى 10 وحدات ، ولكن الوسط يعتمد على المجتمع المسحوب منه المجندون .

(١) ماهو توزيع الوسط لعينة عشوائية اختيرت مكونة من 16 مجندا من مجتمع معين ؟

(٢) نفرض أن التسجيلات فى (١) كانت ,102 ,88 ,116 ,104 ,98 ,101 ,110 ,82 ,112 ,96 ,101 ,78 ,114 ,97 ,93 و 108.ماهو نوع التقرير الذى يمكن أن يعمل عن الوسط غير المعلوم للمجتمع المسحوب منه العينة ؟ أعط مثالا لتقرير من هذا النوع ، والذى يستخدم لشخص مطلوب للتجنيد .

(م أ أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٤)

١٥ - ٣ فى عينة عشوائية من 400 منزل ، 160 لديهم نظام حرارى مركزى . قدر نسبة المجتمع عند 95% مستوى ثقة .

١٥ - ٤ يعطى اختبار صلاحية لجهد المجندين لشركة ما . وتسجيلاتهم تتبع التوزيع الطبيعى بوسط 50 والانحراف المعيارى 10 .

(أ) ماهو احتمال أن مجندا اختيرا عشوائيا سوف يسجل :

(١) أكثر من 65 .

(٢) بين 45 و 55 ؟

(ب) ماهو احتمال أن التسجيل المتوسط لعينة عشوائية من 25 مجندا يكون اقل من 45 ؟

(جـ) ماهو احتمال أن التسجيلات المتوسطة لعينتين عشوائيتين ذات حجم 25 تختلف بأكثر من 5 ؟

(د) أوجد 90% حدود ثقة لتسجيل متوسط لعينة أختيرت عشوائيا مكونة من 100 مجند .

(م أ أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧٦)

الفصل السادس عشر

الاختبار الاحصائى للفروض

١٦ - ١ المفاهيم الأساسية

فى الفصل السابق تناولنا أحد أوجه الاحصاء الاستدلالى ، وهو تقدير المعلومات المجهولة لمجتمع من بيانات العينة . وفى هذا الفصل سنتناول موضوعا مرتبطا بذلك وهو تحديد ما إذا كانت بيانات العينة تؤيد اعتقادا معينا عن المجتمع .

وعندما نستخدم بيانات العينة لاختبار فرض معين ، فإننا نعلم أن الملاحظات قد لاتنطبق بالضبط على الفرض حتى لوكان صحيحا . ولذلك فمن الضرورى أن نلاحظ قرب البيانات من الفرض لنقرر ما إذا كان الاختلاف بينهما ناجما عن الصدفة فقط أم عن عدم صحة الفرض . وكما كان الأمر فى الفصل السابق ، فاننا لن نعلم الحقيقة أبدا ، وكل ما نستطيعه هو أن نتخذ القرار على أساس علمى حتى تكون لدينا فرصة معقولة فى الوصول إلى نتائج صحيحة .

ولتوضيح فكرة الاختبار الاحصائى للفروض سنتناول المثال التالى :

مثال ١٦ - ١ - ١ : يقوم منتج بانتاج كابلات متوسط مقاومتها للكسر 2000 lb وانحرافها المعيارى 100 lb. وباستعمال طريقة جديدة للانتاج يزعم المنتج أنه يمكن زيادة مقاومة الكسر . وللتحقق من هذا الزعم تم انتاج 50 كابلا بالطريقة الجديدة ، واختبرت فأعطت متوسط مقاومة الكسر 2050 lb .

هل يمكن القول بصحة زعم المنتج بمستوى المعنوية 0.01 ؟

(م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٢ رقم ٤)

نضع فرضا هو أن $\mu = 2000$ lb فى مقابل الفرض أن $\mu > 2000$ lb . وسنسمى الفرض الأول بالفرض الصفرى H_0، وسنسمى الفرض البديل H_1 وفى مثالنا هذا ، فإن

$$H_0 : \mu = 2000, \qquad H_1 : \mu > 2000$$

والمطلوب احتمال صغير لرفض H_0 (وبالتالى قبول H_1) اذا كان H_0 صحيحا ويسمى احتمال حدوث ذلك مستوى معنوية أختبار الفرض . وفى المثال نأخذ مستوى للمعنوية مقداره $\alpha = 0.01$. ولو أخذنا بيانات المثال وقمنا بحساب وسط العينة نجد أنه أعلى من 2000 lb بكثير بحيث لاتزيد فرصة حدوثه على 1% اذا كان الوسط الجديد μ مازال 2000 lb ، ولذلك يحق لنا أن نرفض الفرض H_0 والواقع أن قيمة كهذه لوسط العينة تعتبر أعلى معنويا بكثير من 2000 lb وتستعمل كلمة « معنويا » هنا بمفهوم احصائى محدد وهو « غير محتمل حدوثها بمجرد الصدفة » . وتكون قيم وسط العينة المرتفعة عن 2000 lb بدرجة كافية لرفض الفرض H_0 مجموعة من القيم تسمى بالمنطقة « الحرجة » فى الاختبار .

وقد رأينا بالفصل الخامس عشر أن أوساط العينات لها توزيع طبيعى وسطه هو نفس وسط المجتمع μ وانحرافه المعيارى $\sigma/\sqrt{n}$. وفى المثال تكون $\bar{x}$ موزعة توزيعا طبيعيا وسطه μ وانحرافة المعيارى $100/\sqrt{50} = 14.142$ lb . وبالتالى يمكن تحديد المنطقة الحرجة كما يلى :

$$P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geqslant 2.33\right) = 0.01$$ (انظر جداول التوزيع الطبيعى)

$$= P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{14.142} \geqslant 2.33\right) = P(\bar{x}-\mu \geqslant 32.95)$$

فإذا افترضنا أن H_0 فرض صحيح ، فان 2000 = μ وبالتالى :

$$P(\bar{x} - 2000 \geqslant 32.95) = 0.01$$
$$= P(\bar{x} \geqslant 2032.95)$$

وهكذا فلو كان H_0 صحيحا ، فإن هناك احتمالا قدره 1% بالضبط أن يجىء وسط العينة أكبر من 2032.95 lb وبالتالى فان المنطقة الحرجة للاختبار هى المنطقة

$$\bar{x} \geqslant 2032.95 \text{ lb}$$

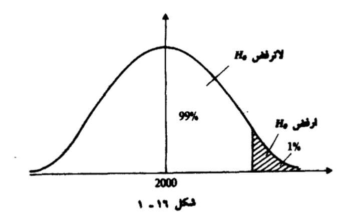
فاذا وقعت $\bar{x}$ داخل هذه المنطقة ، فإننا نرفض H_0 (انظر الشكل ١٦ ـ ١) . ولما كان الوسط الفعلى للعينة هو 2050 lb فاننا نرفض الفرض الصفرى ونستنتج أن العينة تعطينا دليلا كافيا على صحة زعم المنتج أن مقاومة الكسر قد زادت .

وسنترك الآن هذا المثال ، ونبحث البنية العامة لاختبارات الفروض . وستجرى جميع الاختبارات الواردة فى هذا الفصل طبقا للطريقة التالية التى تتكون من ست خطوات .

الخطوة الأولى: تحديد الفرض الصفرى ، والفرض البديل للاختبار . والفرض الصفرى H_0 هو الفرض الجارى اختباره ، وعلى سبيل المثال $H_0 : \mu = 2000$ lb ومع اختبار اتفاق معلومات العينة مع الفرض H_0 يحدد فرض بديل هو H_1 ، وعلى سبيل المثال $H_1 : \mu > \mu_0 = 2000$ lb . ونلاحظ أن الطريقة يمكن أن تؤدى الى رفض H_0 ولكنها لايمكن أن تؤدى الى اعترافنا رسميا بصحة الفرض الصفرى .

الخطوة الثانية: اختيار المستوى المعنوى المناسب للاختبار .

والمستوى المعنوى للاختبار α ، هو احتمال أن نرفض الفرض H_0 فى حين أنه صحيح . ويجب أن



شكل ١٦ ـ ١

نقرر مدى صغر هذا الاحتمال قبل اتخاذ قرارنا بشأن الفرض . وفى العادة يؤخذ مستوى المعنوية مساويا لـ : 0.001 , 0.01 , 0.05 وفى المثال السابق أخذنا $\alpha = 0.01$

الخطوة الثالثة: اختيار مقياس احصائى مناسب للاختبار .

ويحسب من بيانات العينة مقياس احصائى مناسب يستخدم لاختبار الفرض الصفرى وعلى سبيل المثال وسط العينة $\bar{x}$, أو مقياس عيارى مكافىء مثل $(\bar{x}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$. وعامة يختار المقياس الاحصائى للاختبار بحيث أنه اذا زادت (أو نقصت) قيمته ، فإن الفرض الاحصائى يصبح أقل احتمالا . أى أنه يجب أن تكون هناك علاقة مباشرة بين قيمة المقياس الاحصائى للاختبار ، وبين صحة الفرض الصفرى .

الخطوة الرابعة: تحديد المنطقة الحرجة

الان يجب أن نحدد قيمة المقياس الاحصائى للاختبار بحيث يرفض الفرض الصفرى اذا ساوى احتمال الرفض الخاطىء مستوى المعنوية المطلوب . وفى المثال السابق كانت المنطقة الحرجة

$$\bar{x} \geqslant 2032.95 \quad \text{أو بمعنى آخر} \quad \left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geqslant 2.33 \right)$$

الخطوة الخامسة : حساب المقياس الاحصائى من بيانات العينة .

وعلى سبيل المثال

$$\bar{x} = 2050 \text{ lb} \quad \text{أو بمعنى آخر} \quad \left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{2050-2000}{14.142} = 3.54 \right)$$

الخطوة السادسة: تقدير رفض أو قبول الفرض H_0

إذا كان المقياس الاحصائى المحسوب يقع فى المنطقة الحرجة يرفض الفرض H_0 . أما اذا كان يقع خارج تلك المنطقة ، فإننا نستنتج أن بيانات العينة لاتدل دلالة كافية على رفض الفرض H_0 .

البدائل بطرف واحد أو طرفين : فى المثال ١٦ ـ ١ ـ ١ استخدمنا فرضا من النوع

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

حيث $\mu_0 = 2000$ lb . وفى كثير من الحالات يكون الفرض المناسب هو

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

وبمعنى آخر ، فإننا نرفض الفرض H_0 اذا كان الوسط المجهول للمجتمع أكبر أو أصغر معنويا من μ_0 . ويسمى الفرض من هذا النوع بديلا بطرفين . وفى هذه الحالة يجب تقسيم احتمال المعنوية بين الطرفين ، كما هو مبين بشكل (١٦ ـ ٢) ويسمى الفرض البديل من الصورة

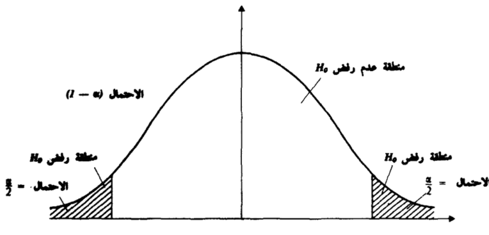
$$H_1 : \mu > \mu_0 \quad (\text{أو } \mu < \mu_0)$$

بالبديل بطرف واحد . وسنوضح فى أمثلة البند ١٦ ـ ٢ الفرق فى طريقة العمل فى الحالتين :

أنواع الخطأ: ذكرنا فيما سبق خطأ رفض الفرض H_0 فى حين أنه صحيح فعلا . ويسمى هذا الخطأ بالنوع الأول من الخطأ . واحتمال وقوعه هو مستوى المعنوية α للاختبار . وهناك كذلك نوع ثان من الخطأ . وهو قبول H_0 فى حين أنه فى الواقع غير صحيح ، وإنما الصحيح هو الفرض البديل . ويسمى هذا عادة بالنوع الثانى من الخطأ ، ويرمز لاحتماله بالرمز β . وهكذا فإن لدينا احتمالين لنوعى الخطأ هما :

$$\alpha = P\ (\text{خطأ النوع الأول}) = P(H_0 \text{ صحيح/ رفض } H_0)$$

$$\beta = P\ (\text{خطأ النوع الثانى}) = P(H_0 \text{ خاطىء/ قبول } H_0)\ \text{و}$$



شكل ١٦ ـ ٢

وعموما ، فإننا نستطيع التحكم فى α وفى الحالة المثالية نفضل أن يكون قيمته قريبة من الصفر . ولكن للأسف كلما حاولنا تقليل α فإن β تزيد . ولذلك فانه عند توافر قدر معين من المعلومات لاتسهل المواءمة بين نوعى الخطأ . وكل ما نستطيع عمله عند تحديد مستوى المعنوية أن نقلل β بزيادة حجم العينة . وفى الاختبار الجيد تكون كل من α و β صغيرتين . ويسمى المقدار $(1 - \beta)$ قوة الاختبار ، والمطلوب أن تكون القوة قريبة من الوحدة ليكون الاختبار جيدا .

١٦ ـ ٢ الاختبارات التى تستخدم التوزيع الطبيعى

والآن سنطبق المفاهيم الأساسية الواردة بالجزء السابق على بعض المسائل المحددة التى تحتاج لمقياس احصائى على أساس التوزيع الطبيعى . ونظرا لنظرية الحد المركزى فان هذا يكون صحيحا فى كثير من الحالات .

وسط المجتمع : لنبحث مجتمعا توزيعه طبيعى وتباينه معروف وهو σ^2 ولكن وسطه μ غير معروف . ولنأخذ عينة بها الملاحظات $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ ونختبر ما إذا كان μ يساوى مقدارا محددا هو μ_0 مثلا . والفرض الصفرى هنا هو $H_0 : \mu = \mu_0$ والبديل ذو الطرفين هو $H_1 : \mu \neq \mu_0$ فاذا كان H_0 صحيحا ، فإن المقياس الاحصائى

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

يكون له توزيع طبيعى قياسى . فاذا كان مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فان H_0 يرفض اذا جاء المقياس الاحصائى للاختبار خارج المدى من 1.96 - إلى + 1.96 وبمعنى آخر يرفض H_0 إذا كان $\bar{x}$ يقع على بعد اكثر من 1.96 خطأ قياسيا من μ_0 .

أما اذا كان المجتمع الأصلى غير طبيعى ، فان المقياس الاحصائى للاختبار يظل طبيعيا تقريبا اذا كانت n كبيرة . وبالاضافة الى ذلك فانه اذا كانت σ^2 غير معلومة يمكن أن نستبدلها بتقديرها غير المنحاز $\hat{\sigma}^2$ بشرط أن تكون $n > 30$.

مثال ١٦ ـ ٢ ـ ١ : ضبطت ماكينة للملء لتملاء عبوات منظف صناعى بوزن متوسطة 16 أوقية.ومعروف أن الانحراف المعيارى يساوى 0.5 أوقية . ومن الضرورى مراجعة الماكينة دوريا لأنها اذا كانت تملاء العبوات اكثر من اللازم فإن هذا يزيد من تكاليف المنظف . أما إذا كانت تملأها أقل من اللازم فان الشركة تتعرض للتقاضى . وقد وزنت 25 علبه مملؤة فأعطت وزنا صافيا قدره 16.25 أوقية . ماهى النتيجة التى يمكن الوصول اليها بمستوى معنوية 0.05 ؟

الاجابة : حيث أننا نريد أن نعلم ما إذا كانت الماكينة تعمل جيدا أم لا ، فإننا نطبق الاختبار بطرفين :

$$H_1 : \mu \neq 16 \quad \text{و} \quad H_0 : \mu = 16$$

ومستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

ولما كان معلوما أن $\sigma = 0.5$ فإننا نستخدم المقياس الاحصائى $T = (\bar{x} - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})$ وله توزيع طبيعى قياسى . وبالتالى فان المنطقة الحرجة هى $T \geq -1.96$ و$T \leq 1.96$ وهذا يعطينا القاعدة التالية لاتخاذ القرار .

اقبل الفرض H_0 اذا كانت T تقع بين 1.96 - و 1.9 +
ارفض H_0 فى الحالات الأخرى

فاذا أعطتنا عينة حجمها $n = 25$ متوسطا $\bar{x}$ قدره 16.25 ، فان

$$T = \frac{16.25 - 16}{0.5/\sqrt{25}} = 2.5$$

ومن الواضح أن هذه القيمة تقع داخل المنطقة الحرجة ، ولذلك نستنتج أن الماكينة لاتعمل بطريقة صحيحة . ومن المنطقى أن نوقف عملية التعبئة ونعيد ضبط الماكينة .

لاحظ أنه فى المثال السابق أجرى اختبار الفرض بنفس الترتيب المذكور فى البند ١٦ ـ ١ .

مثال ١٦ ـ ٢ ـ ٢ : مدير لإحدى الادارات يعتقد أن القيمة المتوسطة لمجتمع كبير من عروض الأسعار هى £10 . ولكن المحاسب يختلف معه ، ويعتقد أنها أقل من ذلك الرقم . وللتأكد من صحة وجهة نظره يأخذ المحاسب عينة عشوائية مكونة من 36 عرضا ، فيجد أن وسطها $\bar{x} = £9.50$ وتباينها $\hat{s}^2 = £\ 400$ وضح كيفية اجراء الاختبار الاحصائى بمستوى معنوية 0.05 .

الاجابة : مرة أخرى نطبق الخطوات الست المذكورة فى البند ١٦ ـ ١ .

١ ـ بما أن المحاسب يريد أن يثبت أن قيمة العروض المتوسطة أقل من £10 نطبق اختبارا بطرف واحد على أساس الفرضين .

$$H_0 : \mu = 10, \quad H_1 : \mu < 10$$

٢ ـ $\alpha = 0.05$.

٣ ـ فى هذه الحالة σ^2 مجهولة ، ولكن نظرا لأن n كبيرة بدرجة معقولة نستخدم المقياس الاحصائى .

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

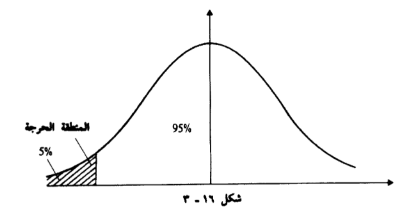
وله توزيع طبيعى قياسى .

٤ ـ المنطقة الحرجة هى $T < -1.645$ كما هو مبين بالشكل (١٦ ـ ٣) . ومن الواضح أنه اذا كانت x أصغر من £10 بكثير ، فإن قيمة T ستقع داخل المنطقة الحرجة .

٥ ـ
$$T = \frac{9.50 - 10.00}{2/\sqrt{36}} = -1.5.$$

٦ ـ بما أن قيمة T لاتقع داخل المنطقة الحرجة ، فلا يوجد لدينا دليل كاف لرفض ما يعتقده المدير .

تمرين ١٦ ـ ٢ ـ ١ : يدعى منتج للطلاء أن علبة واحدة من الطلاء الذى ينتجه تكفى لتغطية 80 مترا مربعا بانحراف معيارى قدره 10 أمتار مربعة . ويريد مفتش حكومى أن يختبر مدى صحة هذا الزعم ، فيأخذ عينة من 36 علبة ، ويجد أن المتوسط هو 75 مترا مربعا . وهذه النتيجة أقل من المطلوب ، ولكن هل هى منخفضة بدرجة كافية بحيث يرفض الزعم ؟



شكل ١٦ ـ ٣

الفروق بين أوساط المجتمعات : هناك كثير من الحالات التى نهتم فيها بمجتمعين مختلفين . وقد لايكون اهتمامنا مركزا على القيم الفعلية لأوساط المجتمعين ، وانما على تحديد ما إذا كانت هذه الأوساط منطبقة . والاختبار ذو الطرفين فى هذه الحالة يقوم على الفرضين التاليين .

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

حيث تدل الأرقام 1 و 2 على المجتمعين 1 و 2 . ولاختيار هذين الفرضين نأخذ عينتين عشوائيتين حجمهما n_1 و n_2 من

المجتمعين . فإذا كان الفرق بين وسطى العينتين $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ كبيرا بدرجة كافية ، فاننا نقبل الفرض H_1 أن وسطى المجتمعين مختلفان .

فاذا افترضنا أن المجتمعين لهما توزيع طبيعى بتباين معلوم هو σ_1 و σ_2 فانه حسب البند ١٤ ـ ٦ يكون توزيع الفرق $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ طبيعيا بمتوسط قيمته $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباين $\sigma^2_1/n_1 + \sigma^2_2/n2$. وبالتالى فان المقدار وبالتالى فان المقدار

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1{}^2/n_1 + \sigma_2{}^2/n_2.}}$$

يتبع التوزيع الطبيعى القياسى . وإذا كان الفرض H_0 صحيحا ، فإن $\mu_1 - \mu_2 = 0$ وبالتالى يصبح المقياس الاحصائى لاختبار الفرق بين الوسطين ، كما يلى :

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1{}^2/n_1 + \sigma_2{}^2/n_2}}$$

ويبقى هذا المقياس مناسبا حتى لو لم يكن المجتمعان طبيعيين تماما ، أو إذا كان التباين مجهولا وحل محله $\hat{\sigma}^2_2$ و $\hat{\sigma}^2_1$ بشرط أن يكون العددان n_1 و n_2 أكبر من 30 .

مثال ١٦ ـ ٢ ـ ٣ : أجريت دراسة لأعمار العاملين فى صناعتين لاكتشاف ما إذا كان عمر العاملين بالصناعة A أكبر من عمر العاملين بالصناعة B . وقد وجد أن متوسط عمر ثمانية من العاملين بالصناعة A هو 38.6 بانحراف معيارى 4.4 سنوات وأن متوسط عمر مئة من العاملين بالصناعة B هو 36.1 بانحراف معيارى 3.8 سنوات اجر الاختبار المناسب (بمستوى معنوية 1%) .

الاجابة :

١ ـ $H_0 : \mu_A = \mu_B, \quad H_1 : \mu_A > \mu_B.$

٢ ـ دع

$$\alpha = 0.01.$$

٣ ـ

$$T = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\hat{\sigma}_A{}^2/n_A + \hat{\sigma}_B{}^2/n_B}}$$

وهذا المقدار يتبع توزيعا طبيعيا قياسيا اذا كان الفرض H_0 صحيحا .

٤ ـ المنطقة الحرجة هى $T > 2.33$.

٥ ـ

$$T = \frac{38.6 - 36.1}{\sqrt{4.4^2/80 + 3.8^2/100}} = 4.02.$$

٦ ـ يتضح أن T تقع داخل المنطقة الحرجة ، أى أن لدينا دليلا كافيا على أن العمر المتوسط للعاملين بالصناعة B اقل من العمر المتوسط للعاملين بالصناعة A .

تمرين ١٦ - ٢ - ٢ : هناك خلاف بين عمال خطين للانتاج ، إذ يقول عمال خط الانتاج A أنهم يتقاضون أجورا أقل مما يتقاضاه عمال خط الانتاج B . ويقوم محاسب الشركة بفحص هذا الخلاف بأن يبحث أجور 36 عاملا من كل خط ، وقد حصل على النتائج التالية :

$$n_A = 36 \qquad \bar{x}_A = £93 \qquad \hat{\sigma}_A = £6$$

$$n_B = 36 \qquad \bar{x}_B = £94.50 \qquad \hat{\sigma}_B = £7.50$$

أجر الاختبار المناسب .

نسب المجتمع : يمكن استخدام التقريب الطبيعي لتوزيع ذات الحدين الذى سبق استخدامه لحل مسائل تقدير النسبة p كذلك لاختبار الفروض عن p .

مثال ١٦ - ٢ - ٤ : يتقدم لوظائف الادارة بشركة كبيرة 20% من الإناث (و 80% من الذكور) وعامة هناك فرق محسوس فى مؤهلات وخبرات الجنسين . وتدعى مجموعة من صاحبات أسهم الشركة أن هناك تفرقة ضد النساء فى سياسة الشركة للاستخدام لوظائف الإدارة . وقد تم فحص سجلات آخر 100 شخص عينوا بوظائف الادارة بالشركة ، ووجد أن 12 منهم من النساء . هل هناك دليل على التفرقة اذا استبعدنا احتمال أى انحياز لتفضيل النساء ؟

(م أ أ - الجزء الأول - نوفمبر ١٩٧٢)

الاجابة : يمكن اعتبار أن هذه المسألة تعنى اختبار الفرضين.

١ - $H_0 : p = 0.2$ و $H_1 : p < 0.2$

٢ - لتكن $\alpha = 0.05$

٣ - بما أن العدد $n = 100$ كبير بدرجة كافية ليكون التقريب الطبيعى صحيحا ، فان

$$T = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

له توزيع طبيعى قياسى . و $\hat{p}$ هنا هو نسبة العينة و p القيمة المحددة بالفرض الأولى .

٤ - اذا كانت $T > -1.645$ فإن النتائج التى حصلنا عليها تتفق مع الفرض الأولى أما إذا لم تكن ، فإن $\hat{p}$ اقل من p بدرجة كافية لجعل H_0 غير محتمل الصحة .

٥ - وفى الواقع فإن

$$T = \frac{0.13 - 0.2}{\sqrt{0.2 \times 0.8/100}} = -1.75$$

٦ - وهذا يعطى لصاحبات الأسهم بعض الدليل على صحة ادعائهن بأن سياسة التعيين فى الشركة بها تفرقة ضد النساء .

تمرين ١٦ - ٢ - ٣ : يقول مبتكر لطريقة جديدة لتحسين القراءة أن 80% من مديرى الأعمال الذين يتمون البرنامج التدريبى الذى ينظمة يستطيعون مضاعفة سرعة استيعابهم للمعلومات المكتوبة . وقد أرسلت احدى المؤسسات 100 من مديريها لحضور البرنامج ، وقد اتضح أن 73 منهم أظهروا تحسنا محسوسا . هل يكفى ذلك للتحقق من صدق مايقوله صاحب الطريقة ؟

(م أ أ - الجزء الأول - ديسمبر ١٩٧٧)

الفروق بين النسب هذه المسألة تصادفنا كثيرا فى العمل الاحصائى . وعلى سبيل المثال قد نحتاج لمعرفة ما إذا كان هناك فرق بين نسبة المدخنين ، وغير المدخنين الذين يعانون من مرض ما . أو ما إذا كان هناك فرق بين النسبة المئوية للسائقين المراهقين من الصبيان أو البنات الذين يرتكبون حوادث قاتلة . ويمكن معالجة المسائل من هذا النوع اعتبارها اختبار للفرض $H_0 : p_1 = p_2$ حيث $\hat{p}_1$ و $\hat{p}_2$ نسب الصفة التى تهمنا فى مجتمعين فاذا رمزنا لحجم العينتين بالرمزين n_1 و n_2 وللنسب الناتجة فى العينتين بالرمزين p_1 و p_2 فانه يمكن تقريب المتغير $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ بواسطة توزيع طبيعى متوسطه : $p_1 - p_2$ وانحرافه المعيارى

$$\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\,.$$

وبافتراض أن $H_0 : p_1 = p_2$ صحيح ، فان وسط التوزيع $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ يساوى صفرا . كما يمكن تصحيح الانحراف المعيارى يجعل $p_1 = p_2 = p$ بحيث أن

$$\hat{p} = \frac{n\hat{p}_1 + n\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{\text{عدد المفرداد ذات الصفة فى العينتين}}{\text{العدد الكلى للمفردات فى العينتين}}$$

وعندئذ يكون المقياس الاحصائى هو :

$$T = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n_1 + 1/n_2)}}\,.$$

فإذا كان لدينا بديل بطرفين نرفض الفرض H_0 اذا كانت T أكبر من 1.96 أو أصغر من 1.96 — عندما يكون مستوى المعنوية 0.05 .

مثال ١٦ - ٢ - ٥: ابلغك المراجع الداخلى بما يلى باعتبارك محاسب الادارة بالشركة :

« وجد 210 خطأ فى عينة من 1000 خطاب بريدى قبل ادخال النظام المترى وبعد ادخال النظام وجد 250 خطأ فى عينة من 1000 خطاب . ويبدو من ذلك أنه ـ حيث أن الموظفين لم يتغيروا ـ فلابد أن دقة ارسال الخطابات قبل ادخال النظام المترى كانت أفضل . والمطلوب اتخاذ الاجراءات لاستعادة الدقة السابقة » .

(أ) ماهو الفرض الأحصائى الذى تنطوى عليه تلك العبارة ؟

(ب) قيم هذا الفرض واذكر ما إذا كان سيؤثر على قرارك كمحاسب للادارة فى اتخاذ اجراء ما .

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٤)

الإجابة:لنفرض أن المجتمع رقم (١) يضم كل الخطابات المرسلة قبل ادخال النظام المترى والمجتمع رقم (٢) يضم الخطابات المرسلة بعد ادخاله . ولما كان محاسب الادارة سيتخذ اجراء فقد اذا كانت نسبة الأخطاء قد زادت معنويا ، فإننا نضع فرضتين هما $H_0 : p_1 = p_2$ و $H_1 : p_1 < p_2$

وبأخذ $\alpha = 0.05$ تكون المنطقة الحرجة $T < -1.645$

ولحساب T يلزم أولا معرفة المقادير التالية

$$n_1 = n_2 = 1000, \hat{p}_1 = \frac{210}{1000}, \hat{p}_2 = \frac{250}{1000}, \hat{p} = \frac{210+250}{1000+1000} = \frac{230}{1000}$$

وهكذا نوجد

$$T = \frac{0.21 - 0.25}{\sqrt{0.23 \times 0.77 \times (.001 + .001)}} = -2.13$$

ولما كانت القيمة المحسوبة لـ T تقع فى المنطقة الحرجة ، فاننا نقبل الفرض القائل بأن نسبة الأخطاء قد زادت . ويبدو أنه لابد من اتخاذ اجراء ما ، وربما كان تنظيم برنامج تدريبى للعاملين على النظام المترى لتحسين الأداء .

تمرين ١٦ ـ ٢ ـ ٤ : أجرت شركة تنتج منتجا ثمينا بحثا للسوق فى سنتين متتاليتين على الأسر التى يزيد دخلها على £10 000 فى العام . وكانت نتيجة البحث كما يلى

	1974	1973
حجم العينة	1000	1300
عدد من يمتلكون المنتج	240	351

ويأخذ منطقة الرفض خارج 2.33 انحرافا معياريا ، هل يدل مسح عام 1974 على أن المبيعات تتناقص ؟
(م ت أ ـ الجزء الأول ـ نوفمبر ١٩٧٤)

١٦ ـ ٣ اختبارات تستخدم توزيع ـ t

عندما تكون لدينا عينات صغيرة ، فإننا كثيرا ما نستخدم توزيع ـ t لستيودنت ، كما أستخدمناه سابقا بالنسبة لفترات الثقة .

وسط المجتمع : إذا أخذت عينة مفرداتها $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ من مجتمع طبيعى وسطه μ وله تباين مجهول σ^2 فان التوزيع المضبوط للمقدار $(x - \mu) / (\sigma/\sqrt{n})$ هو توزيع ـ t له $\mu = n - 1$ من درجات الحرية . وحتى لو لم يكن المجتمع الأصلى طبيعيا ، فان هذه النتيجة صحيحة تقريبا . وسنستخدم هذه النتيجة الان فى الاختبار .

مثال ١٦ ـ ٣ ـ ١ تشترى شركة خمسة منتجات من مورد يقول أنه يتوقع أن يكون عمر المنتج 1050 ساعة . وقد عاشت المنتجات لمدد 964 , 1082 , 1136 , 825 و 863 ساعة . ولم تكن هذه النتيجة مرضية للشركة .
والمطلوب قبل ارسال شكوى للمورد تحليل النتائج وتقديم التوصيات .
١ ـ ماذا يجب أن يكون هدف التحليل ؟
٢ ـ أجر التحليل المناسب ، وأذكر ما إذا كان يجب تأييد الشكوى ، أم لا ؟
٣ ـ ماهو أقل عمر للأجزاء تعتبر أنه يتفق مع ادعاء المورد ؟
(جـ م م ـ الأساس ب ـ ديسمبر ١٩٧٦)

الاجابة : فى هذه المسألة نريد أن نعرف ما إذا كان عمر المنتجات أقل معنوياً من العمر المنتظر المذكور ، أو بمعنى آخر ما إذا كان الفرق يمكن أن يكون ناجماً عن الصدفة . فلذلك نضع الفرضين :

١ ـ $H_0 : \mu = 1050, H_1 : \mu < 1050.$

٢ ـ $\alpha = 0.05.$

٣ ـ المقدار $T = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\partial/\sqrt{n}}$ يتبع توزيع ـ t بدرجات حرية $4 = n - 1 = \upsilon$

٤ ـ لدينا اختبار بطرف واحد ، ولذا فإن المنطقة الحرجة هى $T < -2.13$

٥ ـ من البيانات المعطاة لدينا

$$n = 5,\ \bar{x} = 974,\ \hat{\sigma} = 134.66$$

وبالتالى فإن

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 66.02.$$

وهكذا فإن

$$T = \frac{974 - 1050}{66.02} = -1.262$$

وهذه القيمة لا تقع فى المنطقة الحرجة .

٦ ـ لا نرفض الفرض H_0 ونستنتج أن بيانات العينة لا تعطينا الدليل الكافى لتكذيب العمر المتوسط المذكور . وفى الواقع ، فإننا لا نختلف مع المنتج فى ادعائه إلا إذا وقعت T فى المنطقة الحرجة أو بمعنى آخر إذا كانت

$$\frac{\bar{x} - 1050}{66.02} < -2.13$$

أى أن $\bar{x} < 922$. أما إذا كان العمر المتوسط أكبر من 922 ساعة فإن هذه البيانات تكون متفقة مع ما يقوله المنتج .

ويمكن كذلك استخدام اختبار ـ t لمقارنة مجتمعين عندما يكون هناك اقتران طبيعى لكل زوج من بيانات العينة .

مثال ١٦ ـ ٣ ـ ٢ : أجريت التجربة التالية لاختبار فعالية عامل مجفف فى نوع من الطلاء . أعدت ست عينات ، وقسم كل منها إلى نصفين . ثم طلى نصف العينة بالطلاء المحتوى على العامل المجفف ، وطلى النصف الثانى بالطلاء الذى لا يحتوى على العامل المجفف . وقد تركت العينات لتجف ، فأخذت الوقت التالى للجفاف .

	زمن الجفاف (بالساعة)					
	رقم العينة					
	1	2	3	4	5	6
طلاء محتوى على المجفف	3.4	3.8	4.2	4.1	3.5	4.7
طلاء بدون المجفف	3.6	3.8	4.3	4.3	3.6	4.7

والمطلوب :

اجراء اختبار ـ t لتحديد فعالية العامل المجفف . اذكر أسباب اختيار اختبار بطرف واحد أو بطرفين . اشرح النتائج التى وصلت إليها شرحاً وافياً .

(ح م م ـ الأساس ب ـ ديسمبر ١٩٧٥)

الاجابة : لما كانت كل عينة تعطى رقمين : واحداً لكل طرف من الطرفين ، نرى أن هناك اقتراناً طبيعياً لكل زوج من القيم .

ولكى نحدد ما إذا كان هناك فرق معنوى بين المجتمعين ، نوجد الفروق بين كل زوج من الملاحظات كما يلى :

0.2 0 0.1 0.2 0.1 0

ولنفرض الآن أن هذه الفروق تأتى من مجتمع للفروق وسطه μ . فإذا كانت $\mu > 0$ يكون العامل المجفف فعالا ، وإلا فإن العامل المجفف ليس له أثر ، أو أن أثره سلبى ويتلخص الاختبار فى الفرضين

$$H_0 : \mu = 0, \quad H_1 : \mu > 0$$

ونحتاج لاجرائه الطريقة المشروحة فى المثال ١٦ ـ ٣ ـ ١ .

١ ـ $H_0 : \mu = 0, \quad H_1 : \mu > 0$

٢ ـ $\alpha = 0.05$

٣ ـ المقدار $T = (\bar{x} - \mu)/(\hat{\sigma}/\sqrt{n})$ يتبع توزيع ـ t بدرجات حرية $\upsilon = 6 - 1 = 5$ حيث x و σ هى المستنبطة من فروق العينات .

٤ـ المنطقة الحرجة هى $T > 2.01$.

٥ ـ لدينا

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{0.6}{6} = 0.1$$

و

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}(\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2)} = 0.0894$$

وهكذا فإن :

$$T = \frac{0.1}{0.0894/\sqrt{6}} = 2.74$$

وتقع فى المنطقة الحرجة

٦ ـ نرفض الفرض H_0 ، ونستنتج أن هناك دليلا كافياً على أن العامل المجفف له أثر طيب ، إذ أن احتمال أن يكون التحسن الظاهر ناتجاً عن الصدفة احتمال ضئيل جداً .

تمرين ١٦ ـ ٣ ـ ١ : وجدت شركة لبيع الغسالات الكهربائية أن بائعيها القدامى يبيعون 5.5 غسالة فى الأسبوع فى المتوسط . وعند تعيين بائع جديد يُختبر لمدة خمسة أسابيع ولا يعين بصفة مستديمة إلا إذا حقق مبيعات قدرها 4.8 غسالة فى الأسبوع على الأقل . وقد استطاع أحد البائعين الجدد أن يبيع 5 ، 3 ، 4 ، 6 و 5 غسالات وبالتالى فشل فى الاختبار . وقد احتج البائع على ذلك معلناً أن الاختبار غير عادل ، وأنه يستطيع أن يبيع على المدى البعيد مثله مثل البائعين القدامى وفى نفس الوقت فقد يفشل فى الاختبار .

والمطلوب :

(١) اجراء الحسابات اللازمة والتعليق على ادعاء البائع .

(٢) حساب أقل مبيعات أسبوعية متوسطة فى فترة اختبار مدتها خمسة أسابيع يرفض البائع الجديد إذا لم يحققها .

(جـ م م ـ الأساس ب ـ ديسمبر ١٩٧٧)

الترابط : فى الفصل التاسع بحثنا حساب واستخدام معامل ترابط بسيط r للعينة وكثيراً ما تكون القيم التى يحسب منها هذا المعامل هى عينات مكونة من أزواج من القيم من مجتمع . ويمكن استخدام r لاستنباط النتائج عن معامل ترابط المجتمع المجهول R . وأبسط نتيجة نريد أن نصل اليها هى ما إذا كان هناك ترابط بين المتغيرين . وعندئذ يكون لدينا الفرضان

$$H_0 : R = 0, \quad H_1 : R \neq 0$$

وإذا كانت العينتان من توزيعين طبيعيين تقريباً ، فإن المقياس الاحصائى للاختبار

$$T = \frac{r}{\sqrt{(1 - r^2)/(n - 2)}}$$

يتبع توزيع ـ t بدرجات حرية $\upsilon = n - 2$. ويمكن اختبار الفرضين بالمقارنة بقيمة حرجة لتوزيع ـ t عند مستوى معين للمعنوية . ولنأخذ مرة أخرى المثال الذى بحثناه فى البند ٩ ـ ١ .

تعطى البيانات التالية التكاليف لكل وحدة منتجة (y) ومجموعة الانتاج (x) لدى أحد المنتجين :

التكاليف لكل وحدة منتجة (£)	20	14	12	14	15	9	9	8	28	11
الانتاج الكلى	10	18	25	20	16	30	32	34	9	24

(البيانات مأخوذة من م م ت أ ـ المهنى ١ ـ مايو ١٩٧٤)

وقد بينا فى البند ٩ ـ ١ أن معامل ترابط العينة هو -0.907 . ولا يبدو ممكناً الحصول على مثل هذه القيمة بمجرد الصدفة . ومع ذلك فلاختبار الموضوع بدقة سنسير على نفس الخطوات المشروحة أعلاه .

١ ـ $H_0 : R = 0, H_1 : R \neq 0$

٢ ـ $\alpha = 0.05$

٣ ـ المقدار $T = \frac{r\sqrt{n - 2}}{\sqrt{1 - r^2}}$ يتبع توزيع ـ t بدرجات حرية $\upsilon = 10 - 2 = 8$

٤ ـ المنطقة الحرجة هى $T > 2.31$ و $T < -2.31$.

٥ ـ $$T = \frac{-0.907\sqrt{8}}{\sqrt{1 - (-0.907)^2}} = -6.09$$

٦ ـ وحيث أن T المحسوبة أقل من -2.31 فإن الفرض الأولى الذى ينص على عدم وجود ترابط يعتبر مرفوضاً .

تمرين ١٦ ـ ٣ ـ ٢ : أجريت دراسة فى احدى المدن الكبرى لبحث العلاقة بين العمر والدخل . وقد أخذت عينة من ٩ أفراد وكانت النتيجة كما يلى :

العمر	36	52	30	21	65	24	42	39	45
المرتب (£)	5780	6350	5750	5925	7900	4630	6700	6850	7500

أجر اختبارا لوجود ترابط عند مستوى المعنوية 0.05 .

تمارين :

١٦ ـ ١ الطريقة القياسية التى تستخدمها شركة لاكتشاف المعيبات فى أحد المنتجات تستطيع كشف 90% من المعيبات الموجودة طبقاً لما أظهرته الخبرة السابقة .

والمطلوب :

(١) حساب الخطأ المعيارى لنسبة المعيبات المكتشفة فى 100 وحدة مفحوصة وايجاد احتمال عدم اكتشاف 15 معيبة ، أو أكثر بين 100 معيبة بواسطة هذه الطريقة .

(٢) اقترحت طريقة أخرى للكشف عن المعيبات وعند اختبارها ظهر أنها تكتشف 368 من 400 معيبة . أثبت أن الطريقة الجديدة لا تعطى تحسناً معنوياً فى معدل الاكتشاف .

(جـ م م ـ الأساس ب ـ ديسمبر ١٩٧٧)

١٦ ـ ٢ يقول منتج للمعدات الكهربائية أنه قد طور لمبة جديدة للانارة تعيش لمدة 1000 ساعة . ولاختبار صحة هذا القول أخذت عينة من 16 لمبة ، وأعطت الاختبارات $\bar{x} = 965$ و $\hat{\sigma} = 40$ أجر اختبار مناسباً للفروض عند مستوى المعنوية 0.05 .

١٦ ـ ٣ من المعروف أن عمر مكون كهربائى معين يتبع التوزيع الطبيعى بانحراف معيارى $\sigma = 250$ ساعة ويدعى المنتج أن العمر المتوسط للمكون 5000 ساعة على الأقل . ولاختبار هذا الزعم اختيرت عينة عددها 16 مكوناً فأعطت عمراً متوسطاً قدره $x = 4850$ ساعة اختبر صحة الزعم عند مستوى المعنوية 5% .

الفصل السابع عشر

اختبارات كاى - تربيع

١٧ - ١ توزيع كاى - تربيع

استخدمنا سابقاً اختبارات فرضية لمقارنة مقاييس نوعية للبيانات (بيانات تختص بالكميات) والآن نستخدم اختبارات تقارن تكرارات الحدوث .

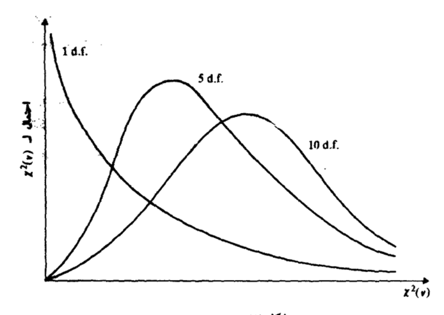
نفرض أن لدينا فئة من التكرارات المشاهدة O_1 ، O_2 ، . . . . ، O_n ونود أن نختبر بعض الفروض حول هذه التكرارات . دعنا نفرض أنه إذا كان فرضنا صحيحاً تماماً ، فإننا يجب أن نتوقع التكرارات E_1 ، E_2 ، . . . . ، E_n وهى التكرارات المتوقعة . والاختبار الاحصائى لاختبار الفرق بين التكرارات المشاهدة والمتوقعة هو

$$\frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2} + \ldots + \frac{(O_n - E_n)^2}{E_n}$$

والذى يمكن كتابته باختصار على الصورة

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

(χ هو الحرف اليونانى كاى) . والآن إذا كان فرضنا صحيحاً يجب أن نتوقع أن الاحصاء χ^2 يكون صغيراً لأن الفروق بين التكرارات المناظرة المشاهدة والمتوقعة تكون صغيرة ، ولكن إذا كان الفرض غير صحيح تماماً فإن بعض الفروق تكون كبيرة ، وبالتالى فإن الاحصاء χ^2 يكون كبيراً ، ونحتاج إلى تعيين قيمة بحيث أنه إذا وقع الاحصاء χ^2 اسفلها يمكن أن نعتقد أن الفرض قد يكون صحيحاً . ولكن إذا كان الاحصاء χ^2 يقع فوقها يمكننا استنتاج أن الفرض خاطىء . مثل هذه القيم مقسمة بواسطة جداول χ^2 (نظر ملحق الكتاب رقم ٢) . وكما فى التوزيع - t توجد توزيعات كثيرة تعتمد على عدد درجات الحرية كما هو موضح فى شكل ١٧ - ١ .



شكل ١٧ - ١

مثال ١٧ - ١ - ١ : إذا كانت الأعداد المرفوضة فى ست كميات ذات حجم متماثل ممثلة فى الجدول التالى :

كميات	الأعداد المرفوضة
A	270
B	308
C	290
D	312
E	300
F	320

فاختبر الفرض الذى يقول بأن الفرق بينها يرجع إلى الصدفة مستخدماً مستوى معنوياً 0.05 .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٣)

الاجابة : طبقاً للفرض بأن كل كمية تحتوى على عدد متماثل من المرفوض ، فإن العدد المتوقع للمرفوض فى كل كمية هو

$$\frac{1}{6}(270 + 308 + 290 + 312 + 300 + 320) = 300$$

وكما نعلم أن مجموع التكرارات المشاهدة هو 1800 فإن مجموع التكرارات المتوقعة لابد وأن يكون هو نفسه . ولهذا فإن التكرار المتوقع للكمية الأخيرة يتعين عندما نعرف التكرارات المتوقعة للكميات الخمس الأولى . ولهذا فان عدد درجات الحرية $v = 6 - 1 = 5$ ومن الجداول ، المنطقة الحرجة تكون $\chi^2_{stat} > 11$ عند 0.05 مستوى معنوى .

والقيمة الحقيقية للاحصاء χ^2 تكون

$$\chi^2 = \frac{(270-300)^2}{300} + \frac{(308-300)^2}{300} + \frac{(290-300)^2}{300} + \frac{(312-300)^2}{300} + \frac{(300-300)^2}{300} + \frac{(320-300)^2}{300}$$

$$= 3.00 + 0.21 + 0.33 + 0.48 + 0.00 + 1.33$$

$$= 5.35$$

الاحصاء χ^2 لا يقع فى المنطقة الحرجة . ولهذا لا يكون لدينا دليل للشك فى أن الفروق بين الأعداد المرفوضة فى كل كمية يرجع إلى أى سبب آخر غير الصدفة .

وفى هذه المرحلة يتضح أن اختبار χ^2 يمكن استخدامه فقط عندما تكون كل التكرارات المتوقعة ليست أقل من 5 وإذا كان هذا الشرط قاسياً ، فإنه يحدث عدم دقة فى الاختبار . ولتجنب هذه الصعوبة يكون غالباً من الضرورى تجميع تكرارات الفئات المتجاورة .

تمرين ١٧ - ١ - ١ : عدد الأعطال التى حدثت فى آخر 100 نقلة موضحاً كما يلى :

عدد الأعطال لكل نقلة التكرار :	0	1	2	3	4	5
العدد المتوقع للنقلات	14	27	27	18	9	5
العدد الحقيقى للنقلات	10	23	25	22	10	10

بين ما إذا كان المدير حقق فى طلبه أن الفرق بين العدد الحقيقى ، والمتوقع للأعطال يرجع إلى الصدفة . من المألوف استخدام 0.05 مستوى معنوى .

(م م ت أ - الجزء الأول - مايو ١٩٧٣)

١٧ - ٢ اختبارات جودة التوفيق

تستخدم اختبارات جودة التوفيق فى اختبار ما إذا كانت فئة التكرارات المشاهدة تختلف معنوياً عن توزيع احتمالى معين ، كمثال ، توزيع ذات الحدين أو توزيع بواسون أو التوزيع الطبيعى . والاجراء هو حساب أفضل تقديرات للبارا مترات التى تنتمى لتوزيع احتمالى معين باستخدام التكرارات المشاهدة . بعد ذلك نستخدم هذه التقديرات لحساب التكرارات المتوقعة للتوزيع ونقارنها بالتكرارات المشاهدة . ومرة أخرى ، التكرار المتوقع لا يجب أن يقل عن 5 .

وفى اختبارات جودة التوفيق ، عدد درجات الحرية لتوزيع χ^2 يتحول إلى

υ = عدد الفئات $-$ 1 $-$ عدد البارامترات المقدرة

وحيث أن الاحصائيين غالباً ما يهتمون بحدوث ، أو عدم حدوث التوزيع الطبيعى فإننا نعطى المثال التالى :

مثال ١٧ - ٢ - ١ : عينة عشوائية من رجال الأعمال طلب منها تقدير معدل النجاح فى حملة دعاية صناعية ، ومقياس التقدير كان من 0 إلى 100 . والنتائج هى كما فى الجدول التالى :

التكرار المقدار	مقيـــــاس
0	0 واقل من 10
0	10 وأقل من 20
0	20 وأقل من 30
8	30 وأقل من 40
16	40 وأقل من 50
13	50 وأقل من 60
23	60 وأقل من 70
15	70 وأقل من 80
16	80 وأقل من 90
9	90 وأقل من 100
100	

الوسط $\bar{x} = 65.5$ والانحراف المعيارى $s = 17.6$

المطلوب اختبار الفرض بأن التقديرات المعطاة من العينة من رجال الأعمال لها التوزيع الطبيعى . (استخدم 5% مستوى معنوى)

(م م ت أ - المهنى ١ - مايو ١٩٧٦)

الاجابة : نختبر هنا أن هذه البيانات لها التوزيع الطبيعى بوسط μ وتباين σ^2 وحيث أن $n=100$ كبيرة فمن الممكن أن نستخدم $\bar{x} = 65.5$ و $s = 17.6$ كتقديرات لـ μ ، σ على الترتيب . (إذا كانت n صغيرة ، فمن الضرورى استخدام $\hat{\sigma}$ بدلا من s) ونحتاج الآن إلى حساب التكرارات المتوقعة لمثل هذا التوزيع الطبيعى الواقع خلال الفئات السابقة .

ونفرض أن x متغير عشوائى من توزيع طبيعى بوسط 65.5 وانحراف معيارى 17.6 وأن z له التوزيع الطبيعى المعيارى ، فإن

$$P(x < 30) = P\left(z < \frac{29.5 - 65.5}{17.6}\right) = P(z < -2.05) = 0.020$$

لاحظ استخدام التصحيح المتصل (استخدام 29.5 وليس 30) فى هذا الحساب لذلك نتوقع $0.02 \times 100 = 2.0$ من القيم ، باعطاء تقدير أقل من 30 وبالمثل .

$$P(30 \leqslant x < 40) = P(-2.05 < z < -1.48) = 0.049$$

نتوقع $0.049 \times 100 = 4.9$ من القيم فى الفترة 30 وأقل من 40 وبنفس الطريقة نحصل على

$$P(40 \leqslant x < 50) = P(-1.48 < z < -0.91) = 0.112$$

ونتوقع 11.2 من القيم تقع فى الفئة التالية . وبإستمرار هذه الطريقة نستطيع أن نحصل على القيم المتوقعة التى تقع فى كل الفئات .

الفئـــة	تكرار مشاهد		تكرار متوقع	
اقل من 30	0	8	2.0	6.9
30 وأقل من 40	8		4.9	
40 وأقل من 50	16		11.2	
50 وأقل من 60	13		18.6	
60 وأقل من 70	23		22.4	
70 وأقل من 80	15		19.7	
80 وأقل من 90	16		12.5	
90 وأقل من 100	9	9	6.0	8.7
اكبر أو يساوى 100	0		2.7	

ويلاحظ أننا جمعنا أول فئتين (وآخر فئتين) لنتغلب على صعوبة الحصول على تكرارات متوقعة أقل من 5 .

الاحصاء χ^2 يكون حسابه

$$\chi^2 = \frac{(8-6.9)^2}{6.9} + \frac{(16-11.2)^2}{11.2} + \ldots + \frac{(9-8.7)^2}{8.7} = 6.05$$

هذا الاحصاء مؤسس على توزيع χ^2 بدرجات حرية 4 (لدينا سبع فئات ، ولكن فقدت ثلاث درجات حرية بوضع ثلاثة قيود على التكرارات المتوقعة ، الوسط والانحراف المعيارى والمجموع الكلى) . وحيث أن 6.05 أقل من القيمة الحرجة 9.49 فإننا لا نشك فى أن البيانات المشاهدة لها التوزيع الطبيعى .

مثال ١٧ - ٢ - ٢ : الجدول الآتى يبين أن العدد المشاهد من الماكينات المعطلة فى اليوم فى أحد المصانع الهندسية خلال مدة 50 يوماً .

عدد الماكينات المعطلة فى اليوم، x	التكرار المشاهد، f
0	4
1	9
2	15
3	11
4	5
5	4
6	1
7	1

ويعتقد أن توزيع تعطل الماكينة فى اليوم يطابق توزيع بواسون . احسب العدد المتوسط للأعطال فى كل يوم ، ثم اختبر هذا الاعتقاد عند 5% مستوى معنوى .

الاجابة: العدد المتوسط للأعطال $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

$$= \frac{(0 \times 4) + (1 \times 9) + (2 \times 15) + (3 \times 11) + (4 \times 5) + (5 \times 4) + (6 \times 1) + (7 \times 1)}{50} = 2.50$$

فى البند ١٤ - ٣ رأينا أن البارامتر m فى توزيع بواسون العام هو وسط التوزيع. ولهذا

$$P\ (x \text{ أعطال عددها }) = \frac{2.5^x e^{-2.5}}{x!}$$

حيث $x = 0$ ، 1 ، 2 ، ...

القيم المتوقعة ، بفرض توزيع بواسون ، تبين فى الجدول الآتى :

x	$P(x)$	التكرار المتوقع = $50\ P(x)$	التكرار المشاهد
0	0.082	4.1	4
1	0.206	10.3	9
2	0.256	12.8	15
3	0.214	10.7	11
4	0.134	6.7	5
5 أو أكبر	0.108	5.4	6

$$\chi^2 = \frac{(4-4.1)^2}{4.1} + \frac{(9-10.3)^2}{10.3} + \frac{(15-12.8)^2}{12.8} + \frac{(11-10.7)^2}{10.7} + \frac{(5-6.7)^2}{6.7} + \frac{(6-5.4)^2}{5.4}$$
$$= 1.05$$

وحيث أن عدد البارامترات المستخدمة فى تقدير التكرارات المتوقعة هو 1 (ولنرمز للوسط بالرمز m) ويكون عدد درجات الحرية $4 = 1 - 1 - 6$.

القيمة الحرجة لتوزيع χ^2 بدرجات حرية 4 هى 9.49 . وبما أن $9.49 > 1.05$ نستنتج أن توزيع بواسون ، هو توفيق جيد للبيانات .

تمرين ١٧ - ٢ - ١ : معمل أبحاث هندسية ، يشترى صندوقاً واحداً به 12 مسماراً قلاووظ بصمولة من كل 100 مصنع مختلف . أختبر تلف كل مسمار ووجد أن توزيع التلف كما يلى :

عدد التلفيات	0	1	2	3	4	5
عدد الصناديق التى بها هذه التلفيات	80	12	3	3	1	1

أحسب العدد المتوسط للتالف فى كل صندوق ، وبين أنه إذا فرض أن كل الصناديق متماثلة فى اختبار التالف ، فإن احتمال التلف يكون 0.03 .

بعد تجميع مناسب للبيانات ، اختبر عند المستوى 5% ما إذا كانت المشاهدات تتفق مع توزيع ذات الحدين . وعلق على النتيجة .

١٧ - ٣ جداول الاقتران

إذا كان كل عضو فى عينة يمكن تصنيفة تبعاً لمقياسين للتصنيف ، فإن النتائج يمكن عرضها فى جدول الاقتران . جداول الاقتران تستخدم فى اختبار استقلال اثنين من العوامل من وجهة أن المعلومات عن الخلية التى تم تصنيف فيها واحدة من المشاهدات التى تتعلق بأحد العوامل ليس لها تأثير على احتمال الوجود فى احدى الخلايا للعامل الآخر . دعنا نعتبر الموقف الآتى : فى مسح احصائى قومى موسع لمستويات الأجور ، كانت البيانات التى تتعلق بعضوية الاتحادات التجارية ، معدلات الأجور جمعت من عينة من 100 شركة واعتبار صنف على أنه (مرتفع) أومنخفض ، بالنسبة إلى معيار اختيارى . والنتائج التى تم الحصول عليها ملخصة كالآتى :

		معدلات الأجور	
		مرتفع	منخفض
عضوية الاتحاد	مرتفع	37	31
	منخفض	11	21

(البيانات مأخوذة من م أأ - الجزء الأول - يوليو ١٩٧٤)

لدينا هنا مثال على جدول الاقتران ، فى الحقيقة أنه 2×2 جدول اقتران ، لأن كل عامل (معدلات الأجور وعضوية الاتحاد) قسم إلى خليتين . وجدول الاقتران العام يشار إليه كأنه $r \times c$ جدول اقتران حيث r عدد الصفوف و c عدد الأعمدة فى جدول الاقتران .

وفى المثال السابق نريد ايجاد ما إذا كان هناك أى دليل على وجود علاقة بين عضوية الاتحاد ومعدلات الأجور . الفروض التى تختبر هى

H_0 : لا يوجد ربط بين عضوية ومعدلات الأجور (أى أن الاستقلال موجود)

H_1 : توجد علاقة بين العاملين .

افرض أن $\alpha = 0.05$.

وطبقاً للفرض الأولى (الصفرى) أن العاملين مستقلين ، فاحتمال أن المشاهدة تقع فى خلية خاصة فى الصف i والعمود j ، مثلا ، هو حاصل ضرب احتمال أنها تقع فى الصف i فى احتمال أنها تقع فى العمود j . وإذا اعتبرنا الخلية التى فى الشمال الأعلى من المثال السابق فإن :

احتمال (معدل أجر مرتفع) × احتمال (عضوية اتحاد مرتفع) × 100 = التكرار المتوقع

$$= 100 \times \frac{68}{100} \times \frac{48}{100} = \frac{68 \times 48}{100} = 32.64$$

ولاحظ أن هذه القيمة تم الحصول عليها بضرب مجموع الصف الأول ومجموع العمود الأول ، ثم بالقسمة على المجموع الكلى . بنفس الطريقة تماماً يمكن أن نوضح النتيجة العامة الآتية :

> التكرار المتوقع لأى خلية يتم الحصول عليها من حاصل ضرب مجموع صفها فى مجموع عمودها مقسوماً على المجموع الكلى .

باستخدام هذه النتيجة العامة نحصل على التكرارات المتوقعة للبيانات السابقة :

		معدلات الأجور	
		مرتفع	منخفض
عضوية الاتحاد	مرتفع	32.64	35.36
	منخفض	15.36	16.64

مرة أخرى ، نقدر ما إذا كانت التكرارات المتوقعة ، المحسوبة طبقاً لصحة الفرض H_0 تختلف معنوياً عن التكرارات المشاهدة أم لا . الاختبار الاحصائى ، كما سبق ، هو

$$\chi^2 = \sum_{\text{لكل الفئات}} \frac{(O - E)^2}{E}$$

وله توزيع χ^2 بدرجات حرية $(r - 1)(c - 1)$ عندما يكون H_0 صحيحاً . ونحصل على عدد درجات الحرية على النحو التالى :

(عدد المجاميع المستقلة) عدد القيود ـ عدد الفئات

$$= rc - (r - 1) - (c - 1) - 1$$
$$= (r - 1)(c - 1)$$

وبالرجوع إلى البيانات السابقة نرى أن القيمة الحرجة هى 3.84 عندما يكون عدد درجات الحرية مساوياً $1 = (2 - 1)(2 - 1)$. وهنا

$$\chi^2 = \frac{(37 - 32.64)^2}{32.64} + \frac{(31 - 35.36)^2}{35.36} + \frac{(11 - 15.36)^2}{15.36} + \frac{(21 - 16.64)^2}{16.64}$$
$$= 3.50$$

ولا نرفض H_0 أى لا يوجد دليل كاف لتدعيم الادعاء بأنه توجد علاقة بين عضوية الاتحاد ومعدلات الأجور .

وسوف نعتبر الآن مثالا آخر .

مثال ١٧ ـ ٣ ـ ١ : عمل فحص على تأخير دفع الفواتير من قبل العملاء لشركتك أعطيت التفاصيل للوضع الحالى فى الجدول الآتى ، والأرقام فى الجدول تمثل عدد العملاء .

	رتبة الشركة العميلة		
	شركات محدودة خاصة		شركات محدودة عامة
موقف المسدد	برأس مال < £1 مليون	برأس مال > £1 مليون	
بطيء جداً (> 4 شهور)	20	10	10
بطيء (3 و4 شهور)	16	14	12
متوسط (1 و< 3 شهور)	22	12	10
سريع (< 1 أشهر)	8	8	8

المطلوب منك عمل تحليل احصائى يبين ما إذا كان هناك علاقة بين رتبة الشركة وحالتها كدافع . استخدم 5% مستوى معنوى ، وبين بوضوح طريقة الحل .

(م م ت أ ـ المهنى ١ ـ نوفمبر ١٩٧٧)

الاجابة :

١ ـ H_0 : لا يوجد علاقة بين رتبة الشركة العميلة وحالتها كدافع .

H_1 : يوجد علاقة ما بين هذه العوامل .

٢ - مستوى المعنوية هو $\alpha = 0.05$.
٣ - الاحصاء χ^2 له توزيع χ^2 بدرجات حرية عددها 6 .
٤ - المنطقة الحرجة هى $\chi^2 > 12.6$
٥ - الجدول الآتى للتكرارات المتوقعة ، تم الحصول عليه بالطريقة العادية بضرب مجموع الصف فى مجموع العمود ثم القسمة على المجموع الكلى .

17.6	11.7	10.7
18.5	12.3	11.2
19.4	12.9	11.7
10.6	7.0	6.4

$$\chi^2 \text{ احصاء} = \frac{(20-17.6)^2}{17.6} + \ldots + \frac{(8-6.4)^2}{6.4} = 3.1.$$

٦ - لا يوجد دليل لدعم الادعاء بأنه توجد علاقة بين رتبة الشركة ، وحالتها كدافع .

تمرين ١٧ - ٣ - ١ : قوالب طوب مصنعة فى فرنين رتبت كدرجة أولى (عالى الجودة) ودرجة ثانية (متوسط الجودة) وشائع (ردىء الجودة) . وانتاج الطوب فى فترة معينة كان كما يلى :

	درجة أولى (بالآلاف)	درجة ثانية (بالآلاف)	الشائع (بالآلاف)	المجموع (بالآلاف)
فرن A	24	43	13	80
فرن B	31	57	32	120

خطة العمل لانتاج الطوب من النوع عالى الجودة بقدر الامكان ، وانتاج العدد من الدرجة الثانية والشائع يرجع إلى كفاية ، أو عدم كفاية العمل . استخدام اختبار χ^2 لتعيين ما إذا كان مدير الفرن A له الحق فى الادعاء بانتاج الطوب من النوع عالى الجودة عن زميله فى الفرن B .

(م م ت أ - الأساس ب - نوفمبر ١٩٧٥)

توزيع كاى - تربيع هو توزيع متصل ، بينما التكرارات المشاهدة هى مقاييس منفصلة هذا يسبب عدم دقة بسيطة عندما يكون عدد درجات الحرية صغيراً والمجموع الكلى للتكرارات المشاهدة صغير . ويمكن الحصول على دقة أكثر فى جداول الاقتران من النوع 2×2 إذا استخدمنا تصحيح ييتس المتصل . وهذا يتم بطرح ½ من القيمة المطلقة لكل مرفق قبل التربيع ، أى أن

$$\chi^2_{stat} = \sum \frac{(|O-E|-0.5)^2}{E}$$

تمارين

١٧ - ١ (أ) وجد أن ارتباطاً واضحاً بين خاصيتين ظهرتا من بعض البيانات هو الخط الفاصل للمعنوية الاحصائية . اشرح هذه النتيجة مع ذكر العمل الذى يجب أن يتم للوصول إلى قرار أوضح .

(ب) شركة تستخدم ثلاث أنواع من ماكينات A و B و C لانتاج وحدات معرضة بشدة لنوع خاص من العيوب . وتوضح عينة عشوائية من 100 وحدة من كل ماكينة العدد من الوحدات السليمة والوحدات المعيبة كما يلى :

		سليم	معيبة
ماكينة	A	33	67
	B	39	61
	C	48	52

المطلوب :

استخدم اختبار كاى - تربيع (x^2) لاختبار ما إذا كان هناك أى ارتباط بين نوع الماكينة والتعرض للعيوب عند 0.05 مستوى معنوى .

(حـ م م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٥)

١٧ - ٢ نفذت تجربة لمقارنة سهولة استخدام ثلاث ماكينات حاسبة متماثلة X و Y و Z نفذ العامل عدداً من العمليات الحسابية غير الشائعة عند سرعة مرتفعة على الماكينة X وكرر الحسابات بعد ذلك على الماكينات Y و Z . وكان عدد أخطاء العامل فى الحسابات 20 عند العمل على X ، و12 عند العمل على Y ، و7 عند العمل على Z .

المطلوب :

(١) إذا كانت الأخطاء فى الحسابات متماثلة التوزيع على الماكينات الثلاث ، فما هى القيمة المتوقعة للنتائج ؟

(٢) لأى غرض تستخدم اختبار معنوية الاحصاء هنا ؟

(٣) استخدم اختبار كاى - تربيع ، وأذكر النتائج بوضوح .

(٤) اذكر نقد هام على الطريقة التى تعمل بها التجربة . وكيف يؤثر هذا على شرح النتائج التى تم الحصول عليها فى الجزء (٣)

(حـ م م - الأساس ب - يونيو ١٩٧٧)

١٧ - ٣ مصنعان يستخدمان مواد مشتراه من نفس الشخص المورد ، وخاضعة إلى حد ما لمواصفات متفق عليها للانتاج خلال فترة معينة ، ومصنفة فى ثلاث درجات من حيث النوع كما يلى :

	درجات النوعية			
	A	B	C	
	الناتج بالأطنان			المجموع
X	42	13	33	88
Y	20	8	25	53
المجموع	62	21	58	141

(أ) هل أرقام الانتاج تعطى فروقاً معنوية عند مستوى 5% ؟

(ب) ما هو الفرض الذى تختبره ؟

(م م ت أ - الجزء الأول - يونيو ١٩٧١)

الفصل الثامن عشر
تطبيقات على المعاينة

١٨ - ١ مقدمة للضبط الاحصائى للجودة

عند الانتاج بالجملة على خط انتاج يكون هناك - حتما - بعض التفاوت فى مواصفاتها وقد يحدث بالعملية الانتاجية التى ظلت مضبوطة فترة من الزمن عيب يؤدى إلى تغير جوهرى فى تلك المواصفات . ودور مفتش ضبط الجودة هو أن يكتشف ذلك التغير بأسرع ما يمكن حتى يتسنى اصلاح العيب .

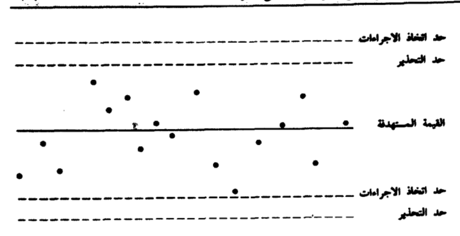
ويحتاج هذا الفصل إلى معلومات فى الاحصاء أكثر من المبادىء الواردة فى الفصلين الرابع عشر ، والخامس عشر . وسنتناول فى هذا الجزء ثلاثة جوانب لضبط الجودة : أولا سنبحث مراقبة مواصفات وحدات الانتاج . ثم سنبحث معاينة مجموعات من المنتجات . وأخيراً سنتناول الحالة التى تصنف فيها المنتجات إلى معيبة (غير مقبولة) أو غير معيبة (مقبولة) .

(أ) خرائط ضبط الملاحظات

عند انتاج عدد كبير من المنتجات نتوقع أن تتفاوت مواصفاتها تفاوتاً ضئيلا . وإذا كان توزيع تلك المواصفات معروفاً فإننا نستطيع أن نحسب نسبة المنتجات التى تقع أبعادها داخل حدود الضبط . وتوضح حدود الضبط بيانياً على خريطة ضبط كتلك المبينة فى شكل ١٨ - ١ والغرض من خريطة ضبط الجودة هو مساعدة مفتش الجودة على اكتشاف ما إذا كانت الملاحظات تعطى وحدات من نفس المجتمع ، أوما إذا كان المجتمع قد تغير بطريقة ما .

وعلى خريطة الضبط بشكل (١٨ - ١) رسمنا حدين للتحذير ، وحدين لاتخاذ الاجراءات . وقد رسم حدا التحذير بحيث نتوقع أن تقع 95% من الملاحظات بينهما إذا كانت العملية الانتاجية مضبوطة . فإذا وقعت إحدى النقط خارج هذين الحدين يجب على المفتش أن يجرى ملاحظة أخرى فوراً . فإذا وقعت ملاحظتان متتاليتان خارج الحدين فإن هذا يعنى عن يقين تقريباً وجود عيب فى العملية الانتاجية . ونتوقع أن تقع كل الملاحظات تقريباً داخل حدى اتخاذ الاجراءات . والنسبة المئوية التى يجب من وجهة نظرنا أن نقع بين هذين الحدين هى 99.8% فإذا كانت العملية الانتاجية مضبوطة ، فلن يخرج عن هذين الحدين أكثر من ملاحظة كل 500 ملاحظة ولذلك يجب ايقاف العملية الانتاجية فوراً إذا وقعت ملاحظة خارجهما .





شكل ١٨ ـ ١

لنأخذ المثال التالى :

مثال ١٨ ـ ١ ـ ١ : مصنع كيماوى به الانتاج التالى كل ساعة على مدى عشر ساعات .

الساعة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الانتاج	140	131	142	121	134	145	131	148	132	136

وقد قرر مدير المصنع أن هذا المعدل المتوسط للانتاج هو المطلوب . وقد طلب منك أن تحسب من هذه البيانات حدى الضبط العلوى والسفلى اللذين يمكن استخدامهما على خريطة لضبط الجودة يراد انشاؤها . ويجب أن يكون الحدان بحيث يغطيان درجة مخاطرة واحد فى العشرين للتحذير من التغيرات الممكنة فى العملية الانتاجية .

احسب :

(أ) الوسط والتباين والانحراف المعيارى للأرقام العشرة للانتاج .
(ب) الحد العلوى والسفلى للضبط للخريطة .
(جـ) ارسم الخريطة وبين عليها حدى الضبط مع أمثلة للملاحظات المسجلة كل ساعة .
(م م ت أ ـ جزء ١ ـ نوفمبر ١٩٧٢)

الاجابة

(أ) وسط العينة $\bar{x} = \frac{1}{10}(140 + 131 + \ldots + 136) = 136.$

تباين العينة $s^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x - \bar{x})^2 = 57.2$

الانحراف المعيارى للعينة $s = 7.56$

(ب) ولما كانت s لا تُعتبر مقداراً غير منحاز يمثل المجتمع يلزم حساب

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, s = 7.97$$

ولما كان حجم العينة صغيراً وقيمة المتغير σ غير معروفة ، فإن حدى الضبط يكونان على الصورة .

$$\bar{x} \pm t\hat{\sigma}$$

حيث t هى القيمة المناسبة من توزيع ـ t بدرجات حرية $n - 1 = 9$ ومن الجداول نجد أن 95% من التوزيع يقع بين الحدين -2.26 ، $+2.26$ وهكذا فإن حدى التحذير هما

$$136 - (2.26 \times 7.97) \text{ إلى } 136 + (2.26 \times 7.97)$$

أى

$$117.99 \text{ إلى } 154.01$$

وهكذا نستنتج أنه لو تم انتاج من 118 إلى 154 وحدة فى الساعة (شاملة هذين الرقمين) فإننا نستطيع أن نقول فى اطمئنان أن العملية الانتاجية مضبوطة . أما إذا كانت احدى القيم خارج هذا المدى ، فإن هناك احتمالا قوياً فى وجود عيب فى النظام .

(جـ) يبين شكل ١٨ ـ ٢ خريطة ضبط الجودة . ولنفرض أنه بعد مدة حصلنا على مستويات الانتاج التالية :

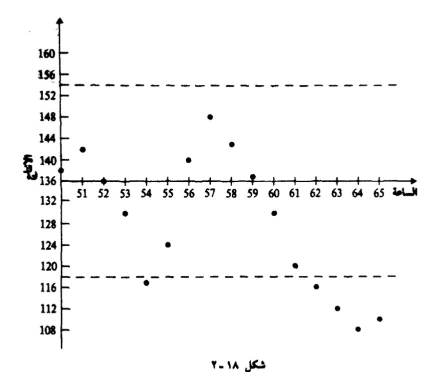
الساعة	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
الانتاج	138	142	136	130	117	124	140	148	143	137	130	120	116	112

ويبين شكل ١٨ ـ ٢ مستويات الانتاج المذكورة . ومع أن احدى القيم تقع أسفل حد الضبط عند الساعة 54 إلا أنه محتمل أن يكون ذلك ناتجاً عن التغير العشوائى العادى الموجود بالعملية الانتاجية . ولا يجب فى هذه المرحلة ايقاف الانتاج . ومع ذلك يجب ايقافها حتماً بعد الساعة 63 حيث أن هناك ملاحظتين متتاليتين أقل من الحد الأدنى للتحذير .

(ب) خرائط ضبط متوسطات العينات

حتى الآن تناولنا حالات تؤخذ فيها ملاحظة واحدة على فترات زمنية منتظمة . ويمكن استخدام الخرائط بطريقة مماثلة عندما تؤخذ عينات صغيرة بانتظام وتكون هذه الطريقة مفيدة بوجه خاص عندما تكون لدينا عملية انتاجية تنتج أعداداً كبيرة من المنتجات . وفى هذه الحالة يكون من السهل سحب عينات صغيرة نسبياً فى عمليات تفتيش لضبط جودة السلع بصفة عامة .

ولنفرض أننا نسحب عينات تتكون من n من القياسات على فترات منتظمة . فإذا كانت القيم مأخوذة من مجتمع توزيعه طبيعى تقريباً ووسط المجتمع هو μ وانحرافه المعيارى هو σ فإنه عندما تكون العملية مضبوطة ، فإن وسط العينات سيقع فى 95% من الحالات بين الحدين $\mu - 1.96\ \sigma/\sqrt{n}$ و $\mu + 1.96\ \sigma/\sqrt{n}$ وبنفس الطريقة فإن 99.8% من أوساط العينات تقع بين الحدين $\mu - 3.09\ \sigma/\sqrt{n}$ و $\mu + 3.09\ \sigma/\sqrt{n}$.



شكل ١٨ ـ ٢

مثال ١٨ ـ ١ ـ ٢ : أظهرت الخبرة أنه فى الظروف العادية ، فإن العملية الانتاجية تعطى وحدات قطرها المتوسط 3.00 بوصة وانحرافها المعيارى 0.01 بوصة أوجد الخطأ المعيارى لوسط عينات مكونة من أربع وحدات ، وأحسب الحدود التى تقع بينها أوساط العينات :

(أ) لـ 95% من العينات .

(ب) لكل العينات عملياً .

ارسم خريطة ضبط الجودة لأوساط العينات المكونة من 4 وحدات مبيناً الحدود الداخلية والخارجية . وقع الأوساط المعطاة فى الجدول التالى على الخريطة ، وعلق على الموقف الذى تظهره الخريطة .

	وسط عينات من أربع عينات مأخوذة كل عشر دقائق				
الزمن (ساعة)	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40
القطر المتوسط (بوصة)	3.003	3.004	2.995	3.001	2.992
الزمن (ساعة)	3.50	4.00	4.10	4.20	4.30
القطر المتوسط (بوصة)	2.996	3.001	3.003	3.006	3.011
الزمن (ساعة)	4.40	4.50	5.00	5.10	5.20
القطر المتوسط (بوصة)	3.005	2.995	2.997	2.993	2.990
الزمن (ساعة)	5.30	5.40	5.50	6.00	6.10
القطر المتوسط (بوصة)	2.991	2.992	2.990	2.986	2.984

(جـ م م ـ الأساس ب ـ يونيو ١٩٧٥)

الاجابة $\mu = 3.00, \sigma = 0.01, n = 4$

وبالتالى :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.01}{2} = 0.005$$

(أ)

$$\mu - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3.00 - 1.96 \times 0.005 = 2.9902$$

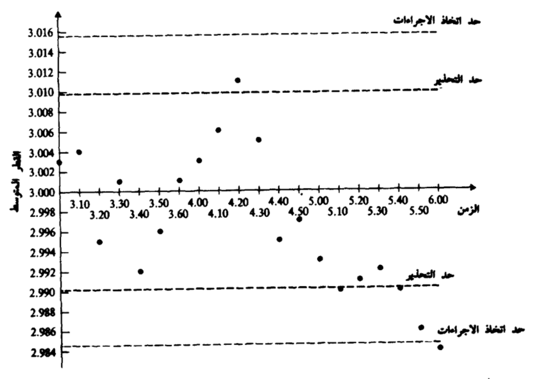
وبالتماثل

$$\mu + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3.0098$$

وقد رسم الحدان 2.9902 و3.0098 على شكل (١٨ ـ ٣)

(ب) حدا اتخاذ الاجراءات هما $\mu - 3.09\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و $\mu + 3.09\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ أو بمعنى آخر 2.8455 و3.1545 .

ونرى أنه يمكن اعتبار أن العملية ظلت مضبوطة حتى الساعة 5.10 وبعد هذا الزمن توجد أربع ملاحظات كلها قريبة جداً من حد الانذار السفلى . ويمكن تجاهل هذه الملاحظات لأن الفرق بينها وبين μ يمكن أن يكون سببه الصدفة . أما الملاحظتان الأخيرتان فتؤكدان الشك فى أن عيباً قد ظهر ، ويجب ايقاف العملية فوراً .



شكل ١٨ ـ ٣

وعملياً كثيراً ما يكون الانحراف المعيارى للمجتمع غير معروف . وهناك امكانية أخذ عدد كبير من المنتجات من العملية وحساب $\hat{\sigma}$ لتقدير σ . وبعد ذلك تستخدم العوامل 1.96 و 3.09 كما فى الأمثلة السابقة . أما إذا كان لدينا قدر بسيط نسبياً من البيانات لتقدير σ فإننا نستخدم نفس الطريقة ولكننا نستبدل بالعاملين 1.96 و 3.09 القيم المناسبة من توزيع ـ t ولكن ما يحدث كثيراً عند التعامل مع العينات الصغيرة هو حساب المدى w لعدد من العينات الصغيرة ، ثم استخدام متوسط المدى $\bar{w}$ كمقياس للتباين فى البيانات . وكما ذكرنا فى البند ٨ ـ ٧ فإن المدى للعينات الصغيرة مرتبط بالانحراف المعيارى بعلاقة بسيطة وبذلك فإن $\bar{w}$ مرتبط بـ σ . وهناك جداول منشورة تعطى العوامل التى يجب ضربها فى w للحصول على حدود التحذير ، واتخاذ الاجراءات للعينات التى يبلغ حجمها n حتى 12 .

(جـ) خريطة ضبط المعيبات

حتى الآن بحثنا خرائط الضبط وتطبيقها على القياسات المستمرة . والآن سنتناول الحالات التى يكون فيها عملياً أن تصنف الأجزاء باعتبارها مرضية أو معيبة . ويكون هذا مناسباً بصفة خاصة عند فحص منتج نهائى لتقرير ما إذا كان مطابقاً للمواصفات .

ولكى نكتشف ما إذا كانت العملية مضبوطة نأخذ عينات على فترات منتظمة ونحسب نسبة المعيبات فى العينات . وترسم هذه النسبة على خريطة لضبط الجودة تحسب حدود التحذير واتخاذ الاجراءات لها على أسس توزيع ذات الحدين له البارامتران n (حجم العينة) و p (نسبة المنتجات المعيبة عندما تكون العملية مستقرة) . وقد رأينا فى الفصول السابقة أن حسابات توزيع ذات الحدين تكون متعبة عندما تكون n كبيرة ولذلك يمكن استخدام توزيع بواسون ، أو التوزيع الطبيعى كتقريب له عندما يكون ذلك مناسباً .

مثال ١٨ ـ ١ ـ ٣ :

(أ) فى عينة كبيرة مأخوذة من الانتاج وجدت 42 وحدة معيبة من مجموع 1000 وحدة . وقد تقرر سحب عينات للضبط حجمها 200 وحدة على فترات معينة .

احسب الوسط المتوقع وحدا 95% و 99% لخريطة الضبط .

(ب) بدأ استخدام الخريطة بناء على الأرقام المحسوبة فى الجزء (أ) أعلاه . وبعد مدة سحبت 15 عينة وجدت بينها المعيبات التالية :

رقم العينة	عدد المعيبات
1	8
2	11
3	9
4	6
5	12
6	8
7	13
8	11
9	14
10	15
11	18
12	10
13	8
14	12
15	7

ارسم الخريطة مبيناً الحدين العلويين لاتخاذ الاجراءات وللتحذير ، ثم وقع عليها النتائج المذكورة أعلاه .

ماذا يبدو أنه حدث ليسبب التغير المفاجيء بين العينات أرقام 11 و12 ؟

(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٣)

الاجابة :

(أ) من العينة الكبيرة نستنتج أن $p = 0.042$ ولما كانت $np = 200 \times 0.042 > 5$ نستطيع استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذات الحدين .

وبالتالى يكون حدا التحذير للنسب المعطاة

$$\hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad \text{و} \quad \hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

وهذان الحدان يساويان

$$0.0698 \quad \text{و} \quad 0.0142$$

ومنها نستنتج أنه عندما تكون العملية مضبوطة فإن 95% من العينات سيكون بها من 3 إلى 13 معيبة (شاملة هذين الرقمين) بين وحدات العينة الـ 200

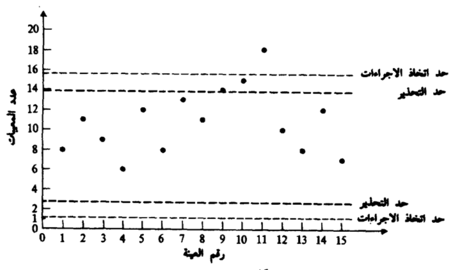
أما حدا اتخاذ الاجراءات للنسب المعطاة فيهما

$$\hat{p} + 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad \text{و} \quad \hat{p} - 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

أى

$$0.0786 \quad \text{و} \quad 0.0054$$

وهكذا فعندما تكون العملية الانتاجية مستقرة يكون عدد المبيعات من 2 إلى 15 (شاملا هذين الرقمين) 99% من المرات .



شكل ١٨ ـ ٤

(ب) يبين شكل (١٨ ـ ٤) حدود الانذار ، واتخاذ الاجراءات . لاحظ أنه فى هذا المثال أخذ حدا اتخاذ الاجراءات على أساس نسبة 99% وليس 99.8% التى استخدمناها سابقاً . ويبدو واضحاً أنه حدث تدخل فى العملية بين العينتين 11 و 12 . وقد وجد خطأ فى العملية عند العينة 11 . وقد تم تصحيح الخطأ وبالتالى تحسنت النتائج التالية .

تمرين ١٨ ـ ١ ـ ١ : تم ضبط ماكينة بحيث تنتج رولمان بلى قطره المتوسط 17.5 مم وانحرافه المعيارى 0.06 مم وللتأكد من أن الماكينة تحافظ على المواصفات المطلوبة تؤخذ عينة مكونة من تسع وحدات كل ساعة ، ويحسب القطر المتوسط للعينة .

(أ) احسب حد الثقة المقابل لنسبة 95% للمواصفات المذكورة أعلاه .
(ب) استخدم الحدود المحسوبة فى (أ) أعلاه لرسم خريطة الضبط ووقع عليها المتوسطات التالية للعينات .

رقم العينة	1	2	3	4	5	6	7	8	9
الوسط (مم)	17.47	17.50	17.49	17.52	17.54	17.57	17.51	17.52	17.50

(جـ) علق على النتائج ، وعلاقتها بالحدود التى تم حسابها .
(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ مايو ١٩٧٥)

تمرين ١٨ ـ ١ ـ ٢ : تسحب من على خط الانتاج مجموعات مكونة من 100 وحدة على فترات زمنية ثابتة وتختبر . وقد وجد عدد الوحدات المعيبة فى كل مجموعة كما يلى :

4	3	2	0	7	5
2	4	1	3	4	6

(أ) احسب متوسط نسبة المعيبات .
(ب) ارسم خريطة لضبط الجودة للعينات المكونة من 200 وحدة بحيث يكون الحد الداخلى مساوياً للمتوسط زائد انحراف معيارى واحد ، والحد الخارجى مساوياً للمتوسط زائد ضعف الانحراف المعيارى .
(جـ) هل يمكن استخدام هذه الخريطة لمجموعات مكونة من 50 وحدة ؟ إذا كانت الاجابة بلا فما السبب ؟
(م م ت أ ـ الجزء الأول ـ يونيو ١٩٦٩)

١٨ ـ ٢ دور المعاينة فى المراجعة

الدور الأساسى للمراجع الخارجى هو التحقق من أن حسابات الشركة صحيحة وطبقاً للقانون . وفى بداية عمليات المراجعة لم يكن مستغرباً أن يقوم المراجع بفحص جميع المعاملات المالية . ولكن هذا أصبح نادراً اليوم بسبب العدد الضخم من المعاملات المالية التى تتم فى كثير من الشركات الكبرى . وعادة يتم التغلب على هذه المشكلة بفحص جزء صغير من الحسابات واستخدام المعلومات الناتجة للوصول إلى صورة عامة عن مجتمع الحسابات كله . ويعتبر هذا بالطبع معاينة .

ويعكس المجالات الأخرى التى تستخدم فيها المعاينة ، فإن استخدام المعاينة التقديرية منتشر فى المحاسبة . ومع أن هذه الظاهرة تناقصت فى الأعوام العشرين ، أو الثلاثين الماضية إلا أنه يبدو أن شركات المحاسبة الكبيرة جداً هى

فقط التى تستخدم الطرق الاحصائية للمعاينة . وهناك سببان لذلك : الأول أنه فى المراحل الأولى لتطور الاحصاء لم يكن هناك إلا القليل من الأبحاث فى مجال المال والاقتصاد . ومع أن هذا لم يعد هو الحال الآن إلا أن غالبية الأبحاث الحديثة غير موثقة بسبب قيمتها المالية لشركات المحاسبة . والسبب الثانى لنقص الطرق الاحصائية للمعاينة فى المحاسبة هو ضعف الخلفية الاحصائية لكثير من قدامى المحاسبين . ولن يصبح هذا مشكلة فى المستقبل لأن معظم المحاسبين الآن يدرسون الاحصاء فى فترة تأهيلهم .

ومزايا المعاينة الاحصائية على المعاينة التقديرية هى نفسها المذكورة فى البند ٦ ـ ٢ باختصار وهى أنها تسمح بحساب أفضل حجم للعينة لتحقيق الدقة المطلوبة . أو بالعكس تسمح بتحديد الدقة إذا عرفنا حجم العينة ـ وهذا مهم بالطبع إذا كانت شركة المحاسبة قد تتعرض للمحاكمة إذ ثبت اهمالها ، أو إذا ثبت أن مراجعتها لم تكن كافية . فإذا استطاعت الشركة أن تثبت أن مراجعتها تمت بطريقة لها أساس علمى معترف به ، فهذا يجعل موقفها أكثر أماناً مما لو كانت الطريقة المستخدمة شخصية محضة مهما كانت درجة خبرة المراجع .

وسنتناول فى هذا الجزء خمسة تطبيقات للطرق الاحصائية للمعاينة على مراجعة الحسابات . وسندرس كلا من تلك الأساليب على حدة .

(أ) تقدير المتغيرات بالمعاينة

تستخدم هنا النظريات المشروحة بالفصل الخامس عشر لتقدير القيمة الكلية لمجتمع من الحسابات على أساس عينة منها . ومن الواضح أننا نستطيع استخدام النتيجة القائلة بأن

$$\text{تقدير قيمة المجتمع} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} \times \text{قيمة العينة}$$

وذلك عندما يتم اختبار العينة عشوائياً . ومن الأمثلة التقليدية لذلك فى مجال المال والاقتصاد تقدير ما يلى :

١ ـ قيمة المخزون
٢ ـ قيمة الأصول
٣ ـ قيمة الأخطاء
٤ ـ قيمة المخاطرات

ولنأخذ مثالا لحساب حجم العينة لتحقيق درجة معينة للدقة .

مثال ١٨ ـ ٢ ـ ١ : معلوم من الخبرة السابقة أن الانحراف العيارى لمجتمع يتكون من 000 20 مفردة هو $\sigma = £250$ والمطلوب تقدير هذه المفردات الـ 000 20 ولكن نظراً لضيق الوقت تقرر فحص عينة عشوائية منها فقط . والمطلوب أن يكون التقدير دقيقاً لأقرب مليون جنيه بدرجة ثقة 99% . ما هو حجم العينة التى يلزم أخذها ؟

الاجابة : المطلوب أن يكون الاحتمال

$$P(-1\,000\,000 < 20\,000\,(\bar{x} - \mu) < 1\,000\,000) > 0.99$$

أى أن

$$P(-50 < \bar{x} - \mu < 50) > 0.99$$

وبالتالى فإن

$$2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 50$$

$$\sqrt{n} > \frac{2.58 \times 250}{50} = 12.9$$

$$n > 12.9^2 = 166.4$$

أى أن أصغر حجم للعينة هو 167 مفردة .

(ب) تقدير الصفات بالمعاينة

فى هذه الحالة مطلوب تقدير عدد ، أو نسبة المفردات فى المجتمع التى تتمتع بصفة معينة . وفى مراجعة الحسابات يكون التطبيق المعتاد لهذه الطريقة هو لتقدير عدد الأخطاء فى مجموعة من الحسابات . وهناك تطبيقات أخرى منها :

١ - نسبة الديون التى تأخر تسديدها ستة شهور .
٢ - عدد الموظفين الذين يحصلون على أجر اضافى فى أحد الأسابيع .
والنتيجة التالية مفيدة فى هذا المجال :

تقدير عدد المفردات فى المجتمع التى تتمتع بالصفة = (حجم المجتمع / حجم العينة) × عدد المفردات فى العينة التى تتمتع بالصفة .

وبإستخدام النظريات الواردة بالفصل الخامس عشر يمكننا حساب درجة ثقة تقريبية لتقديرنا .

مثال ١٨ - ٢ - ٢ : يريد مراجع حسابات أن يقدر عدد العروض التى يوجد بها خطأ صغير معين ضمن عدد اجمالى قدره $N = 50\,000$ عرض فى تجارة الشهر الماضى . وقد أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 250$ من العروض ، فاتضح أن بها 10 عروض بها خطأ .
احسب حدود ثقة 95% تقريبية لهذا المجتمع .

الاجابة : حدود الثقة 95% هى

$$N\left(\hat{p} \pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = 50\,000\left(0.04 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.04 \times 0.96}{250}}\right)$$

$$= 785 \text{ و } 3215$$

(جـ) الاكتشاف بالمعاينة

يهتم الاكتشاف بالمعاينة بفحص مجتمع لمحاولة الكشف عن حالة واحدة من خطأ جسيم . ومن المواقف التى يمكن أن تندرج تحت هذا العنوان :

١ - اختلاس النقود .
٢ - الغش .
٣ - انهيار الرقابة الداخلية .

وعندما يتم اكتشاف العيب توقف المعاينة فوراً ، ويقدم تقرير عن الخطأ .

ويمكن فى الاكتشاف بالمعاينة اعتبار أن احتمال مثل هذا الخطأ ضئيل جداً . وهذا يسمح لنا باجراء الحسابات ببساطة باستخدام توزيع بواسون كتقريب لتوزيع الحدين (أنظر الجزء ١٤ ـ ٤) .

مثال ١٨ ـ ٢ ـ ٣ : لنفرض أن لدينا مجتمعاً كبيراً معدل الخطأ به ½% . أوجد احتمال العثور على خطأ إذا أخذت عينة عشوائية حجمها :

١ ـ $n = 40$ ٢ ـ $n = 100$ ٣ ـ $n = 600$

الاجابة :

١ ـ $p = 0.005$ ، $n = 40$. وباستخدام تقريب بواسون نوجد $m = np = 0.2$ ،
واحتمال عدم وجود خطأ = $P(r = 0) = e^{-m} = e^{-0.2} = 0.82$

أى أن احتمال العثور على خطأ هو 18% فقط .

٢ ـ $p = 0.005$ ، $n = 100$ ، $m = 0.5$.
واحتمال عدم وجود خطأ = $0.61 = e^{-0.5}$

أى أن احتمال العثور على خطأ هو 39% .

٣ ـ $p = 0.005$ ، $n = 600$ ، $m = 3$.
واحتمال عدم وجود خطأ = $0.05 = e^{-3}$

أى أن احتمال العثور على خطأ هو 95% .

(د) القبول بالمعاينة

تستخدم الشركات مراجعين داخليين لمراقبة نظام الحسابات لديها ، والتأكد من أنه يعمل جيداً ولمساعدة المراجع تؤخذ عينات من الحسابات على فترات منتظمة لمراجعتها ، والتأكد من أن معدل الخطأ بها لا يزيد على حد معين . ويسمى هذا بالقبول بالمعاينة وهو مجرد تطبيق لضبط الجودة على المحاسبة . وفى القبول بالمعاينة تهمنا الأخطاء غير الجسيمة وليس حالات الغش ومن أمثلة تلك الأخطاء :

١ ـ خطأ فى التاريخ .
٢ ـ خطأ فى الجمع .
٣ ـ عدم ختم الوثيقة .
٤ ـ عدم توقيع الوثيقة من الشخص المسئول .

وبصفة عامة فإن القبول بالمعاينة لا يهم المراجع الخارجى الذى يهتم فقط بأخذ عينة واحدة .

مثال ١٨ ـ ٢ ـ ٤ : يقوم مراجع داخلى بشركة كبيرة بمراجعة عينة من 500 من المعاملات المالية كل أسبوع للتأكد من أن نظام المحاسبة يسير على ما يرام . ومن المنتظر حدوث عدد من الأخطاء البسيطة التى لا يمكن القضاء عليها تماماً . ولكن الشركة تعتقد أنه يجب ابقاء معدل الخطأ أقل من 2% . ما عدد الأخطاء التى يجب أن تظهر فى العينة حتى يتأكد المراجع من أنه تم تجاوز المعدل المسموح به للخطأ (بدرجة ثقة 95%) ؟

الاجابة إذا كان معدل الخطأ هو 2% فإن هناك احتمالا قدره 0.05 فقط فى أن يتم العثور على أكثر من

$$(500 \times 0.02) + 1.645 \sqrt{500 \times 0.02 \times 0.98} = 15.15$$

من الأخطاء (باستخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذات الحدين) . فإذا وجد المراجع 16 خطأ ، أو أكثر يمكنه أن يتأكد بدرجة معقولة من تجاوز معدل الخطأ .

(هـ) المعاينة حسب القيمة النقدية

هذه الطريقة من الطرق الحديثة للمعاينة ، وهى مفيدة لتقدير قيمة الخطأ فى المجتمع من عينة من المفردات باستخدام النتيجة .

$$\text{تقدير القيمة الاجمالية للأخطاء فى المجتمع} = \frac{\text{القيمة الكلية للمجتمع}}{\text{القيمة الكلية للعينة}} \times \text{القيمة الاجمالية للأخطاء فى العينة}$$

ومنها نرى أنه يمكن الحصول على تقدير أدق للقيمة الاجمالية للأخطاء إذا كانت قيم العينة كبيرة مما إذا كانت صغيرة . ويمكن تحقيق ذلك بالتقسيم إلى طبقات طبقا لأحد معايير القيمة ، ثم باختيار نسبة عالية من قيم العينة الكبيرة . وفى المعاينة حسب القيمة النقدية نحقق ذلك باختبار مفردات يتناسب احتمالها مع قيمتها . وهكذا فإن مفردة قيمتها £5 لها خمسة أضعاف الفرصة أن تؤخذ ضمن العينة من مفردة قيمتها £1 . وسنأخذ مثالا بسيطاً لتوضيح هذه الطريقة .

مثال ١٨ ـ ٢ ـ ٥ : لدينا مجتمع يتكون من 15 مفردة . والمطلوب اختيار عينة من 5 مفردات بحيث يتناسب احتمال الاختيار مع القيمة . وفيما يلى قيم المجتمع :

£10 £30 £1 £5 £24 £38 £3 £20 £2 £40 £8 £15 £18 £5 £31

الاجابة : فى البداية نحسب سلسلة من المجاميع التراكمية وهنا يكون لدينا £10 و£40 و £41 و£46 و £70 و£108 و £111 و £131 و£133 و £173 و £181 و£196 و £214 و £219 و£250 . وقد حصلنا على هذه القيم بجمع القيم الواردة فى المجتمع تراكمياً ، وعلى سبيل المثال 40 = 30 + 10 و41 = 1 + 40 .

ولما كان الاجمالى هو £250 نختار خمسة أرقام عشوائية (من جداول الأرقام العشوائية) بين 001 و250 ولنفرض أن هذه الأرقام هى ،

089, 140, 060, 249, 195

ولنأخذ الرقم 089 .

ولما كان مجموع القيم الخمس الأولى فى المجتمع أقل من £89 نأخذ أيضاً القيمة رقم 6 (وهى £38) فى العينة . وبنفس الطريقة

140 تقابل القيمة رقم 10 (وهى £40)
60 تقابل القيمة رقم 5 (وهى £24)
249 تقابل القيمة رقم 15 (وهى £31)
195 تقابل القيمة رقم 12 (وهى £15)

(وهناك طريقة أفضل لاختيار الأرقام العشوائية وهى باستعمال المعاينة المنتظمة ، أى باختيار أى رقم بين 0 و 50 وليكن 39 ثم استخدام الأرقام العشوائية 39 و89 و139 و189 و239 لاختيار المفردات) .

وهذه هى الأساليب الخمسة للمعاينة الاحصائية التى تفيد المراجعين . ومازال عدد من المراجعين يوجهون النقد لاستخدام المعاينة الاحصائية لسببين ، والأول انهم يعتقدون أن عملية الاختيار العشوائى فى حد ذاتها تستهلك وقتاً طويلا وهى غير مريحة . ويمكن الرد على ذلك بأن معظم الوثائق المالية تحفظ الآن على الكومبيوتر ، ومن السهل بمكان برمجة الكومبيوتر ليعطى البيانات الخاصة بالعينة عشوائياً . والنقد الثانى الذى يوجه هو اعتقادهم بأن المراجع المتمرس يستطيع أن يختار عينة أفضل من العينة العشوائية . ويرد الاحصائيون على ذلك بأن الخبرة يجب أن تستخدم لتقسيم المجتمع إلى طبقات ، وأن الحاجة إلى العشوائية لا تظهر إلا فى المرحلة الأخيرة من عملية اختيار العينة .

وفى اعتقادنا أن تطور أساليب المعاينة الاحصائية فى مجال المال والاقتصاد سيستمر فى التزايد . ومن واجب كل المحاسبين الذين يصبون إلى اتقان المهنة أن يتعرفوا على تلك الأساليب .

الملحق الأول

حلول التمارين

الفصل الثانى

٢-١-٣ $a = -3$

٢-٢-١ $x = 1.5$ ، $y = -2$

٢-٢-٢ 10 للسبيكة X ، 20 للسبيكة Y

٢-٢-٣ $p = 1$ ، $q = 1$ ، $v = 2$

٢-٣-١ $x = 3$

٢-٣-٢ $x = 0.5$ و $x = 2.75$

٢-٣-٣ $x = 0.56$ و $x = -1.099$

٢-٣-٤ 7 و 12

٢-٤-١ $n = 0.25$

٢-٤-٢ (أ) 5.66 ، (ب) 2.58

تمارين

٢-١ $x = 0.5$ ، $y = 0.125$ ، $z = -0.2$

٢-٢ (أ) التكلفة $= 10\,000 + 7.5x$

الايراد $= 60x - \frac{x^2}{20}$

الربح $= -\frac{x^2}{20} + 52.5x - 10\,000$

(جـ) أقصى ربح $= £3781$

عدد الوحدات $= 525$

سعر البيع $= £33.75$

٢-٣ إما $x = -1.738$ ، $y = 2.317$ ، $z = -2.317$

أو $x = 0.863$ ، $y = -1.151$ ، $z = 1.151$

الفصل الثالث

٣-١-١ 10

٣-١-٢ 1210

٣-١-٣ 828

٣-١-٤ £1650

٣-٢-١ −153.8

٣-٢-٢ 12285

٣-٢-٣ 422/ 243

٣-٢-٤ 75 ، 45

٣-٢-٥ 11

٣-٣-١ 8.5%

٣-٣-٢ $11\frac{1}{2}$ من السنين

٣-٣-٣ £1972

٣-٣-٤ 5.7 من السنين

٣-٣-٥ (١) 32.55% (٢) £2415

٣-٣-٦ (أ) £4517 (ب) £4665 (جـ) 5.3 من السنين

٣-٤-١ (١) $74\frac{1}{2}$ بنس (٢) 75 بنس

٣-٤-٢ £340 855

٣-٥-١ نعم وذلك لأن القيمة الكلية الممثلة للدخل هى £138 630

٣-٥-٢ 12.5%

تمارين

٣-١ الطريقة (١) التى تكلف £405.39 ؛ الطريقة (٢) وتكاليفها £407.38

٣-٢ £7362

٣-٣ (أ) 5.0% (ب) £27 423

الفصل الرابع

٤-٢-١ $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

٤-٢-٢ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

٤-٢-٣ $\begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 12 & 10 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

٤-٢-٤ $\begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 18 & 14 \end{pmatrix}$

٤-٢-٥ $\begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 12 & 29 \\ 15 & 37 \end{pmatrix}$

٤-٣-١ (ب) ¿ لـ X و 2 لـ Y

٤-٤-١ £5263

٤-٤-٢ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$x_1 = -25/4, x_2 = 5, x_3 = -3/4$

٤-٥-١ £442.10 m لأنتاج A و £463.16 m لأنتاج B

٤-٥-٢ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6000 \\ 10\,000 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

التكلفة النهائية التى توزع على اقسام الانتاج هى
£15 266 لـ P_1 و £27 734 لـ P_2

تمارين

٤-١ (١) $Ax = b$
(٢) A هو مصفوفة من رتبة $m \times n$

٤-٢ (١) $C = (10 \quad 9 \quad 6)\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

(٢) $C = 30 + 54 + 12 = 96$

٤-٣ 442.84 من P ، 369.83 من Q و 492.35 من R

٤-٤ (أ)

$$\begin{pmatrix} 40 & 70 & 7 \\ 22 & 35 & 12 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 525 \\ 30 \end{pmatrix}$$

(ب) أرمز للكميات المطلوبة من النواتج الأربعة بالرموز q_1 ، q_2 ، q_3 ، q_4 وسعر الوحدة المناظرة بالرموز P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 على التوالى :

المطلوب هو

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix}$$

الفصل الخامس

• ٥-١-١ (١) $\frac{dy}{dx} = 4x^3$، الميل = 0 (٢) $\frac{dy}{dx} = 10x - 3$، الميل = 17

(٣) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^2}$، الميل = -2 (٤) $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$، الميل = 0

• ٥-٢-١ القيمة العظمى تساوى 15 عندما $x = -1$ ، القيمة الصغرى تساوى -12 عندما $x = 2$

• ٥-٣-١ (١) الربح الأكبر يساوى 235 عندما $x = 14$

(٢) 16.8

تمارين

• ٥-١ (أ) $\frac{dy}{dx} = 9x^2 + 4x + 1$ (ب) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^3} + 2x$

(جـ) $\frac{dy}{dx} = 15x^2 - 4$

• ٥-٢ $(1, -2\frac{2}{3})$ تكون صغرى ، $(-5, 33\frac{1}{3})$ تكون عظمى

• ٥-٣ (أ) $MR(x) = 50$ (ب) $MC(x) = 4x$ (جـ) $MP(x) = 50 - 4x$

(د) $x = 12.5$ (هـ) 112.50 (و) من 5000 الى 12000 وحدة

• ٥-٤ (أ) $q = 20$ (ب) $q = 4$ (جـ) $q = 22$

الفصل الثامن

٨-٢-١ الوزن المتوسط يساوى 4.375 من الأطنان

٨-٢-٢ الزمن المتوسط يساوى 5 ساعات و40 دقيقة

٨-٣-١ الوسيط يساوى £54.83

٨-٤-١ المنوال يساوى 17.2 طالب

٨-٦-١ 2

٨-٦-٢ 2

٨-٦-٣ £13.14

٨-٧-١ 1.67

٨-٧-٢ £10.37

٨-٧-٣ £9.77

٨-٨-١ -0.6

٨-٨-٢ -0.088

تمارين

٨ ـ ١ (ب) (١) الوسط يساوى 7.26 من الساعات
(٢) الوسيط يساوى 7.4 من الساعات
٨ ـ ٢ (ب) (١) الوسيط يساوى £84
الوسط يساوى £86.47
المنوال يساوى £76.90
٨ ـ ٣ (أ) (١) 64 (٢) 34 (٣) 36 (٤) 17 (٥) 51 (٦) 17 (٧) 17.2 (٨) 19.63
٨ ـ ٤ (أ) (١) 29.5 (٢) 9.5

الفصل التاسع

٩ ـ ٢ ـ ١ (أ) $y = 7.489 + 1.213x$
٩ ـ ٢ ـ ٢ $y = -1.435 + 1.759x$
٩ ـ ٣ ـ ١ (أ) $y = 182\,144 + 8086.41x$
(ب) 246 835 ألف مليون وات من الساعات
(1969 أخذت كسنة البداية أى عند 0)
٩ ـ ٤ ـ ١ $r = 0.879$
٩ ـ ٥ ـ ١ (٢) 0.65

تمارين

٩ ـ ١ $y = 21\,250 + 0.962x$
$y = £46\,250$ عندما $x = 26\,000$
$y = £68\,125$ عندما $x = 48\,750$

٩ ـ ٢ (١) للعلاقة (i) $t = 4.94, 6.06, 7.50, 9.26$
للعلاقة (ii) $t = 5, 6, 7, 8$
(٣) $t = 2.026 + 0.357r$
٩ ـ ٣ (أ) المدى هو من -1 إلى $+1$
(جـ) $r = 0.950$
تغير الوحدات لا يؤثر على r .

٩ ـ ٤ (١) ارتباط الرتبة بين المبيعات ، والسعر يساوى 0.827 .
ارتباط الرتبة بين المبيعات ، والخدمة يساوى 0.421 .
(٢) ارتباط الرتبة بين الخدمة ، وحجم الساحة الأمامية يساوى 0.206 .

الفصل الحادى عشر

١١-١-١ (أ) 966.7 (ب) 1355.7

١١-١-٢ 966.7

١١-١-٣ 766.7

١١-١-٤ 252.2

١١-١-٥ 1150.0

١١-١-٦ 966.7

١١-١-٧ 1158.7

١١-١-٨ (جـ) رقم باش هو 137.9 .

١١-١-٩ (١) 136.2 (٢) 208.5 .

تمارين

١١-٣ لـ 1971 الرقم القياسى هو 109.0

لـ 1972 الرقم القياسى هو 126.3

١١-٤ (ب) (١) 1.67 و 1.50

(٢) 158 (٣) 1.54

(٤) رقم باش يساوى 161.44 ولا سبيرز يساوى 158.15

الفصل الثانى عشر

١٢-١-١ (أ) 3 (ب) 33

١٢-٢-١ (أ) 0.7 (ب) 0.4 (جـ) 0.3

١٢-٣-١ $P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

١٢-٤-١ (أ) $\frac{1}{48}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{35}{48}$

ومجموع هذه الاحتمالات الثلاثة يساوى 1 .

١٢-٤-٢ (أ) 0.64 (ب) 0.15 (جـ) 0.29 (د) 0.3

١٢-٥-١ 5/6

١٢-٥-٢ (أ) 5/9 (ب) 5/73

١٢-٦-١ 60 480

١٢-٦-٢ 210

١٢-٦-٣ 924

تمارين

١٢-١ (١) 0.252 (٢) 0.042 (٣) 0.514

١٢-٢ (١) 0.3185 (٢) 0.0115 (٣) 0.2055

١٢ - ٣ (١) (i) 0.276 (ii) 0.22
(٣) 0.385
١٢ - ٤ (١) (i) 0.8 (ii) 0.625 (iii) (أ) 0.48 (ب) 0.16
(٢) 0.62

الفصل الثالث عشر

١٣ - ٢ - ١ 2.7 يوم للعملية A ، 2.8 يوم للعملية B
١٣ - ٢ - ٢ 60 بدلة .
١٣ - ٣ - ١ (١) £3250 (٢) أولا X ثم إذا أمكن Y
الربح المتوقع هو £2500
١٣ - ٤ - ١ الفرص الضائعة المتوقعة هى £32.25 للعدد 0 باقة ، £18.50 لعدد 100 باقة ، £9.75 لعدد 200 باقة ، £11.00 ، £18.50 لعدد 400 باقة . أقصى ربح على المدى البعيد سيتحقق عند شراء 200 باقة فى اليوم .
١٣ - ٥ - ١ (ب) 30 000 برنامج
(جـ) الربح مع معلومات دقيقة قيمته المتوقعة £133 000 للموسم .
قيمة المعلومات الدقيقة للموسم حتى £20 000
١٣ - ٦ - ١ (١) Z (٢) X (٣) Y

تمارين

١٣ - ١ التكاليف المتوقعة هى (١) £13 100 (٢) £16 300 (٣) £16 000
يوصى بـ(١) .
١٣ - ٢ الفرص الضائعة المتوقعة هى : £5600 عند عدم التطوير ، £9600 عند التطوير .
يوصى بعدم التطوير .
١٣ - ٣ (أ) 1.7 (ب) 3 (جـ) £6000 (د) £4100 .
١٣ - ٤ أكبر قيمة حالية صافية هى للمصنع الأكبر .
(القيم المتوقعة للمصنع الكبير ، والصغير هى 3771.45 و 2014.05)

الفصل الرابع عشر :

١٤ - ٢ - ١ (أ) 0.3932 (ب) 0.3446
١٤ - ٢ - ٢ 0.879
١٤ - ٢ - ٣ بين 40 و 60
١٤ - ٣ - ١ 0.2381
١٤ - ٣ - ٢ لا بسبب التوقع فى زيادة الربح اليومى يكون فقط £143
١٤ - ٤ - ١ لا بسبب التوقع فى تكلفة كل صندوق مدرج هو فقط 2.8 بنس

١٤-٦-١ (١) 0.308 (٢) 0.533 (٣) 7.7 من الأسابيع (٤) 0.159
١٤-٦-٢ (١) 23 ساعة (٢) 0.3085 (٣) 0.1811 (٤) 0.1762
١٤-٦-٣ 0.0228
١٤-٧-١ 0.0968

تمارين

١٤-١ (١) 23.3% (٢) 10.9%
١٤-٢ (١) 0.5 (٢) 0.2119 (٣) 0.00202 (٤) 0.0287
١٤-٣ (١) $e^{-\lambda}, \lambda e^{-\lambda}, \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}, \frac{\lambda^3}{6} e^{-\lambda}, \frac{\lambda^4}{24} e^{-\lambda}$

(٢) $e^{-2\lambda}, 2\lambda e^{-2\lambda}, 2\lambda^2 e^{-2\lambda}, \frac{4}{3}\lambda^3 e^{-2\lambda}, \frac{2}{3}\lambda^4 e^{-2\lambda}$

١٤-٤ (أ) 0.000 7864 (ب) 0.8658

الفصل الخامس عشر

١٥-١-١ (أ) 502 g ، 0.9375 g (ب) 0.017
١٥-٢-١ £150 ؛ £11 613 إلى £12 387
١٥-٢-٢ 0.146 إلى 0.174
١٥-٣-١ 11.75 إلى 17.25

تمارين

١٥-١ 17 ؛ 14.77 إلى 19.23 .
١٥-٢ (١) توزيع طبيعي بوسط يساوي μ ، وانحراف معياري يساوي 2.5 .
(٢) 95.1 إلى 104.9 .
١٥-٣ 0.352 إلى 0.448 .
١٥-٤ (أ) (١) 0.0668 (٢) 0.3830
(ب) 0.0062 (جـ) 0.2112 (د) 48.355 إلى 51.645

الفصل السادس عشر

١٦-٢-١	$T = -3\ (< -1.645)$	رفض H_0
١٦-٢-٢	$T = 0.9\ (< 1.645)$	قبول H_0
١٦-٢-٣	$T = -1.75\ (< -1.645)$	رفض H_0
١٦-٢-٤	$T = 1.632\ (< 2.33)$	قبول H_0
١٦-٣-١	$T = -1.765\ (> -2.13)$	قبول H_0 ؛ 4.41
١٦-٣-٢	$r = 0.808, T = 3.62\ (> 2.36)$	رفض H_0

تمارين

١٦ - ١ (١) 0.03 ، 0.0668 ؛ (٢) $T = 3.24\ (> 1.645)$ رفض H_0

١٦ - ٢ $T = -3.5\ (< -1.75)$ رفض H_0

١٦ - ٣ $T = -2.4\ (< -1.645)$ رفض H_0

الفصل السابع عشر

١٧ - ١ - ١ $\chi^2 = 7.88\ (< 11.1)$ قبول H_0

١٧ - ٢ - ١ $\chi^2 = 11.1\ (> 3.84)$ رفض H_0

١٧ - ٣ - ١ $\chi^2 = 2.99\ (< 5.99)$ قبول H_0

تمارين

١٧ - ١ $\chi^2 = 4.75\ (< 5.99)$ قبول H_0

١٧ - ٢ $\chi^2 = 6.615\ (> 5.99)$ رفض H_0

١٧ - ٣ $\chi^2 = 1.50\ (< 5.99)$ قبول H_0

الفصل الثامن عشر

١٨ - ١ ١ (أ) 17.461 الى 17.359

(جـ) عيب يعدل بعد العينة 6 .

١٨ - ١ - ٢ (أ) 0.0342

(ب) الحد الداخلى يساوى 0.0470 ، الحد الخارجى يساوى 0.0599

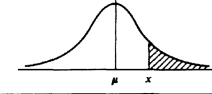
(جـ) لا .

الملحق الثانى

جداول احصائية

المساحات الطرفية للتوزيع الطبيعى

$\frac{X-\mu}{\sigma}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2398	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1410	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0778	.0764	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0445	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.02275	.02222	.02169	.01228	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
2.4	.00820	.00748	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139



المساحة الطرفية	10%	5%	2.5%	2%	1%	0.1%	0.01%	0.001%
$\frac{x-\mu}{\sigma}$	1.2816	1.6449	1.9600	2.0537	2.3263	3.0902	3.7190	4.2649

نقط النسبة المئوية لتوزيع - t

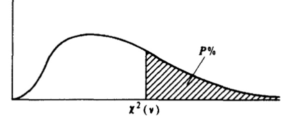
	اختبارات من طرفين					
v	10%	5%	2%	1%	0.1%	v
1	6.31	12.7	31.82	63.7	63.7	1
2	2.92	4.30	6.96	9.92	31.6	2
3	2.35	3.18	4.54	5.84	12.9	3
4	2.13	2.78	3.75	4.60	8.61	4
5	2.01	2.57	3.36	4.03	6.86	5
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.96	6
7	1.89	2.36	3.00	3.50	5.40	7
8	1.86	2.31	2.90	3.36	5.04	8
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.78	9
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.59	10
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.44	11
12	1.78	2.18	2.68	3.05	4.32	12
13	1.77	2.16	2.65	3.01	4.22	13
14	1.76	2.14	2.62	2.98	4.14	14
15	1.75	2.13	2.60	2.95	4.07	15
16	1.75	2.12	2.58	2.92	4.01	16
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.96	17
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.92	18
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.88	19
20	1.72	2.09	2.53	2.85	3.85	20
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.82	21
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.79	21
23	1.71	2.07	2.50	2.81	3.77	23
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.74	24
25	1.71	2.06	2.48	2.79	3.72	25
26	1.71	2.06	2.48	2.78	3.71	26
27	1 70	2.05	2.47	2.77	3.69	27
28	1.70	2.05	2.47	2.76	3.67	28
29	1.70	2.05	2.46	2.76	3.66	29
30	1.70	2.04	2.46	2.75	3.65	30
40	1.68	2.02	2.42	2.70	3.55	40
60	1.67	2.00	2.39	2.66	3.46	60
120	1.66	1.98	2.36	2.62	3.37	120
∞	1.64	1.96	2.33	2.58	3.29	∞
v	5%	2.5%	1%	0.5%	0.05%	v
	اختبارات من طرف واحد					

v هى عدد درجات الحرية

نقط النسبة المئوية لتوزيع χ^2

	P(%)											
υ	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	υ
1	0.0439	0.0315	0.0398	0.0039	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	1
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	2
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	4
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	6
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	7
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	8
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	12
13	3.87	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	18
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	19
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	20
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	21
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	22
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	23
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	24
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6	25
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1	26
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5	27
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9	28
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3	29
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7	30

ν هي عدد درجات الحرية



الملحق الثالث

قائمة القوانين

نعطى هنا ملخصاً للقوانين الأكثر أهمية ، والمفاهيم التى قد أدرجت فى هذا الكتاب .

الفصل الثانى :

المعادلة العامة للخط المستقيم $y = a + bx$

حيث a هو الجزء المقطوع من محور x

b هو الانحدار .

الصورة العامة لمنحنى الدرجة الثانية $y = ax^2 + bx + c$

الحلول للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هى $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

الفصل الثالث

المتوالية العددية :

الحد رقم n هو $t_n = a + (n - 1)d$

مجموع n من الحدود $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

المتوالية الهندسية :

الحد رقم n هو $t_n = ak^{n-1}$

مجموع n من الحدود $S_n = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1}$

فائدة مركبة : $P_n = P_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

قيمة حالية : $P_0 = P_n\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{-n}$

راتب سنوى : $P_0 = \frac{A\,[1 - (1 + r/100)^{-n}]}{r/100}$

الفصل الثامن

الوسط للبيانات الغير مبوبة : $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

الوسط للبيانات المبوبة : $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

الوسيط للبيانات المبوبة : $\tilde{x} = L + \frac{(50\% - P1)}{(P2 - P1)} \times (U - L)$

المنوال : $L + \frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})} \times (U - L)$

الانحراف المعيارى للبيانات غير المبوبة : $s = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$

الانحراف المعيارى للبيانات المبوبة : $s = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}\right)^2}$

الانحراف المتوسط : $MD = \frac{\Sigma\,|\,x - \bar{x}\,|}{n}$

نصف المدى الرُبَيعى : $QD = \frac{Q3 - Q1}{2}$

معامل التغاير : $CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$

معامل بيرسون للألتواء : $\frac{3(\bar{x} - \tilde{x})}{s}$

معامل بوليى للألتواء : $\frac{(Q3 - \tilde{x}) - (\tilde{x} - Q1)}{QD}$

الفصل التاسع :

خط الانحدار للمربعات الصغرى : $y = a + bx$

حيث $b = \frac{\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)/n}{\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n}\ ,\ a = \frac{\Sigma y - b\Sigma x}{n}$

معامل الارتباط : $r = \frac{\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)/n}{\sqrt{\left[\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}\right]\left[\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n}\right]}}$

معامل سبيرمان لأرتباط الرتب : $\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$

الفصل الحادى عشر

الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار : $\frac{\Sigma p_n}{\Sigma p_0} \times 100$

الوسط البسيط لمناسيب الأسعار : $\frac{1}{k}\sum\frac{p_n}{p_0} \times 100$

رقم لاسبيرز القياسى للأسعار : $\frac{\Sigma(p_n q_0)}{\Sigma(p_0 q_0)} \times 100$

رقم باش القياسى للأسعار : $\frac{\Sigma(p_n q_n)}{\Sigma(p_0 q_n)} \times 100$

الفصل الثانى عشر :

قاعدة الجمع : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

قاعدة الضرب : $P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A)$

نظرية بايز : $P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)\,P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)\,P(A_j)} \quad (i = 1, \ldots, n)$

الفصل الثالث عشر :

القيمة المتوقعة : $\sum\limits_{\text{كل نتائج التجربة}}$ (احتمال النتيجة) × (القيمة المرتبطة بالنتيجة)

الفصل الرابع عشر

توزيع ذى الحدين :

P (r من النجاحات) = $_nC_r\, p^r (1-p)^{n-r}$

الوسط = np الانحراف المعيارى = $\sqrt{np(1-p)}$

توزيع بواسون :

P (r من النجاحات) = $\frac{m^r e^{-m}}{r!}$

الوسط = m الانحراف المعيارى = $\sqrt{m}$

توزيع طبيعى :

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-[(x-\mu)^2/2\sigma^2]}$

الوسط = μ الانحراف المعيارى = σ

الفصل الخامس عشر

الخطأ المعيارى للوسط : $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

الخطأ المعيارى للنسبة : $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

التقدير غير المتحيز لتباين المجتمع : $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

الفصل السادس عشر

اختبار للوسط الواحد : $T = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

الذى له توزيع طبيعى حينما تكون n كبيرة ، σ معلومة .

الخطأ المعيارى للفرق بين المتوسطات : $\sqrt{(\sigma_1{}^2/n_1) + (\sigma_2{}^2/n_2)}$

الخطأ المعيارى للفرق بين النسب : $\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$

اختبار للوسط الواحد : $T = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$

الذى له توزيع ـ t بدرجات حرية $\upsilon = n - 1$ حينما يكون المجتمع التابع طبيعياً .

اختبار عدم الترابط : $T = \frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}}$

الذى له توزيع ـ t بدرجات حرية $\upsilon = n - 2$

الفصل السابع عشر

احصاء كاى تربيع : $\chi^2 = \sum\frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1}$

الملحق الرابع

قائمة بالقراءات المقترحة

على الرغم من اعتقادنا بأن هذا الكتاب سوف يكون مفيداً للمهتمين بمجال الأعمال ، فقد وضعناه أساساً من أجل طلبة المستوى الأساسى فى المحاسبة . وقد انعكس هذا فى الأمثلة والتمارين ، وفى مجال الموضوعات المحتواة . مثلا ، قليل جداً من الاختبارات الاحصائية فى هذا المستوى تحتوى كثيراً من العمليات الرياضية مثل ما فى هذا الكتاب . ومن المقصود أن الكتب المسماة فى المراجع الآتية أن تساعد القراء لنظرة أوسع فى واحد أو أكثر من الطرق الآتية :

١ ـ بتقديم مدى أعم من الأمثلة والتمارين فى الموضوعات المعطاه .
٢ ـ بتقديم معالجة بديلة للموضوعات ، وفى بعض الأمثلة ، المعالجة تمتد لمستوى أكثر تقدماً .
٣ ـ بالاشارة إلى مكان موضوعات بحوث العمليات ، التى لمست باختصار فى هذا الكتاب ، ويمكن اتباعها .

العمود الذى على اليسار من الجدول يبين فصول هذا الكتاب والتى تخص الكتب المقترحة .

الكتب

الفصل الأول

Edwards, B., *Sources of Business and Economic Statistics*, Heinemann, London, 1972.
Huff, D., *How to Lie with Statistics*, Penguin, London, 1973.
Reichmann, W. J., *Use and Abuse of Statistics*, Penguin, London, 1972.

الفصل الثانى

Moore, P. G., *Basic Operational Research*, Pitman, London, 1976.
Wilkes, F. M., *Elements of Operational Research*, McGraw-Hill, London, 1980.

الفصل الثالث

Ayres, F. J., *Mathematics of Finance*, McGraw-Hill, New York, 1963.
Lucey, T., *Quantitative Techniques*, D. P. Publications, Winchester, 1979.

الفصلان الرابع والخامس

Dinwiddy, C., *Elementary Mathematics for Economists*, Oxford U.P., E. Africa, 1968.
Weber, J. E., *Mathematical Analysis – Business and Economic Applications*, Harper & Row, New York, 1976.

الفصل السادس

Moser, C. A., and C. Kalton, *Survey Methods in Social Investigation*, Heinemann, London, 1971.

الفصول من السابع إلى السابع عشر

Freund, J. E., and F. J. Williams, *Elementary Business Statistics: The Modern Approach*, Prentice-Hall, London, 1977.
Kazmier, L. J., *Theory and Problems of Business Statistics*, 'Schaum Outline Series', McGraw-Hill, New York, 1976.
Taylor, P., and D. Dunning, *Statistics for Business*, Polytech. Pub., Stockport, 1977.
Yeomans, K. A., *Statistics for the Social Scientist*, Vols. I and II, Penguin, Harmondsworth, 1968.

الفصل الثالث عشر

Thomas, H., *Decision Theory and the Manager*, Pitman, London, 1972.

الفصل الرابع عشر

Meyer, P., *Introductory Probability and Statistical Applications*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.

الفصل الثامن عشر

McRae, T. W., *Statistical Sampling for Audit and Control*, Wiley, London, 1974.
Smith, T. M. F., *Statistical Sampling for Accountants*, Haymarket, London, 1976.

المصطلحات العلمية (عربى - انجليزى)

(أ)

اتجاه	Trend
اتحاد الفئات (المجموعات)	Union of sets
اتخاذ القرار	Decision making
اتساق	Consistency
اتصال مركب	Continuous compounding
احتمال	Probability
احتمال بايزى	Bayesian probability
احتمال تجريبى	Empirical probability
احتمال شرطى	Conditional probability
احتمال كلاسيكى	Classical probability
الاحتمال اللاحق	Posterior probability
الاحتمال المسبق	Prior probability
احداث متنافية	Mutually exclusive events
احصاء استقرائى	Inferential statistics
الاحصاء المالى	Financial statistics
احصاء الانفاق العائلى	Family Expenditure survey
احصاءات وصفية	Descriptive statistics
احصاء	Statistic
رصيد للاحلال	Sinking fund
اختبار جودة التوفيق	Goodness of fit test
اختبار كاى تربيع	Chi-squared test
اختبار معنوى	Significance test
اختبار من طرف واحد	One-tailed test
اختبارات الفروض	Hypothesis testing
اختبارات النسب	Proprtions tests
ارتباط	Correlation
ارتباط واستقلال	Correlation and independence
ارتباط الرتبة	Rank correlation

ارتباط سلبي	Negative correlation
أرقام قياسية غير مرجحة	Unweighted index numbers
الأرقام القياسية القاعدية المرتبطة	Link-based index numbers
استقصاء	Questionnaire
استقصاء بريدي	Postal questionnaire
استراتيجيات اتخاذ القرار	Strategies in decision
استكمال خارجي	Extrapolation
استكمال داخلي	Interpolation
استهلاك (خفض)	Depreciation
استهلاك الأصول الثابتة بطريقة النسبة الثابتة	Reducing balance depreciation
اقتصاد قياسي	Econometrics
الالتواء	Skewness
انحراف متوسط	Mean deviation
الانحراف المعياري	Standard deviation
أنواع الخطأ في اختبارات الفروض	Types of error in hypothesis
الأهداف عند اتخاذ القرار	Objectives in decision making
أوزان ترجيح للقيم	Value weights

(ب)

بيانات غير مبوبة	Ungrouped data
بيانات مبوبة	Grouped data
برمجة خطية	Linear programming

(ت)

تباديل	Permutations
تباين	Variance
تحليل السلاسل الزمنية	Time-series analysis
تحليل المدخل والمخرج	Input-output analysis
تحليل معادلة الدرجة الثانية إلى عوامل	Factorization method for quadratic equations
تحيز	Biase
تحيز في المسوح	Bias in surveys
تدوير المصفوفات	Transposition of matrices
ترجيح الأرقام القياسية طبقاً للسنة النموذجية	Typical time weighting of index numbers

Dispersion	تشتت
Dispersion of data	تشتت البيانات
Relative dispersion	تشتت نسبي
Continuity correlation	تصحيح مستمر
Yates continuity correlation	تصحيح ييتس المتصل
Census	تعداد
Multicollinearity	تعدد العلاقات الخطية
Cyclical variation	تغير دورى
Seasonal variation	تغير موسمى
Differentiation	تفاضل
Kurtosis	تفرطح
Intersection of sets	تقاطع الفئات (المجموعات)
Estimation	تقدير
Point estimation	تقدير بنقطة
Unbiased estimate	تقدير غير متحيز
Estimation sampling of variables	تقدير المعاينة للمتغيرات
Frequency of a class	تكرار الفئة
Cumulative frequency	تكرار متجمع
Relative frequency	تكرار نسبى
Marginal cost	تكلفة حدية (هامشية)
Deflating	تكميش
Prediction	تنبؤ
Forecasting from a time series	تنبؤ من السلاسل الزمنية
Combinations	توافيق
Combinations of normal distributions	توافيق التوزيعات الطبيعية
Probability distribution	توزيع احتمالى
Exponential distribution	توزيع أسى
Poisson distribution	توزيع بواسون
Poisson approximation to the binomial distribution	توزيع بواسون كتقريب ذى الحدين
Binomial distribution	توزيع ذى الحدين
Student's t-distribution	توزيع ـ t لستيودنت
Normal distribution	توزيع طبيعى
Normal approximation to the binomial distribution	توزيع طبيعى كتقريب ذى الحدين

Bivariate normal distribution	توزيع طبيعي ثنائي
Continuous distribution	توزيع متصل
Sampling distribution of means	توزيع المعاينة للأوساط
Sampling distribution of proportions	توزيع المعاينة للنسب
Discrete distribution	توزيع منفصل
Best fit	توفيق أفضل

(جـ)

Frequency tables	جداول تكرارية
Contingency table	جدول اقتران
Percentage frequency table	جدول تكرار النسبة المئوية
Cumulative percentage frequency table	جدول تكرار النسبة المئوية المتجمع
Pay off table	جدول العائد
Intercept	جزء مقطوع
Addition of probabilities	جمع الاحتمالات
Addition of matrices	جمع المصفوفات
Goodness of fit	جودة التوفيق

(حـ)

Size of sample	حجم العينة
Action limit	حد الانجاز
Warning limit	حد الانذار
Class boundary	حد الفئة
Limitations of statistics	حدود الاحصاء
Five-bar gate	حزمة
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Judgement sampling	حكم بالمعاينة

(خـ)

Means chart	خرائط الأوساط
Control chart	خريطة الضبط
Quality control chart	خريطة ضبط الجودة
Bar chart	خريطة المستطيلات (الأعمدة)

خريطة المستطيلات (الأعمدة) المركبة	Compound bar chart
خريطة المستطيلات المنفردة للنسب المئوية	Percentage component bar chart
خصم	Discounting
خط الانحدار	Linear regression
خط التوزيع المتساوى	Line of equal distribution
خط التوفيق الأفضل	Line of best fit
خط مستقيم	Straight line
خطأ معيارى	Standard error

(د)

دالة أسية	Exponential function
دالة الايراد	Revenue function
دالة التكلفة	Cost function
دالة الكثافة الاحتمالية	Probability density function
دالة لوغاريتمية	Logarithmic function
دالة نصف لوغاريتمية	Semilog function
دخل اضافى	Marginal revenue
درجات الحرية	Degrees of freedom
دفعات سنوية متساوى	Annuities
دقة زائفة	Spurious accuracy
دورات الاقتصاد	Business cycles

(ر)

ربيع	Quartile
رسم بيانى للسلال الزمنية	Time series graphs
رسم بيانى نصف لوغاريتمى	Semi-log graph
رسم مصور	Pictogram
رسومات بيانية (أنظر معادلات وأشكال بيانية)	Graphs (see equations and graphs)
رسوم دائرية	Pie chart
رقم باشى القياسى	Paasche index number
رقم قياسى لأسعار التجزئة	Index of Retail Prices
رقم قياسى تجميعى بسيط	Simple aggrigative index
رقم قياسى تجميعى مرجح	Weighted aggregative index

رقم قياسى بطريقة السنة النموذجية	Typical year index
رقم قياسى للقيم	Value index
رقم قياسى كمى	Quantity relative
رقم لاسبيرز للقياس	Laspeyres index number

(ز)

زمن معلوم	Given time

(س)

سببيه	Causality
سلاسل زمنية	Time series
سلسلة من الأرقام القياسية القاعدية المرتبطة	Chain based index numbers
سوء استخدام الاحصاء	Abuses of statistics

(ش)

شجرات القرار	Decision trees
شكل الانتشار	Scatter diagram
شكل فن	Venn diagram
شكوك فى اتخاذ القرار	Uncertainties in decision making

(ض)

ضرب الاحتمالات	Multiplication of probabilities
ضرب المصفوفات	Multiplication of matrices

(ط)

طرق المعاينة	Sampling methods
طريقة المتوسطات المتحركة	Method of moving averages
طريقة المربعات الصغرى	Method of least squares
طول الفئة	Class length

(ع)

عدم الاستجابة	Non-response
علاقات غير خطية	Non-linear relationships
عمود (مستطيل)	Bar

عينة	Sample
عينة عشوائية بسيطة	Simple random sample

(غ)

غير خطى	Nonlinear

(ف)

فاقد الفرصة	Opportunity loss
فائدة بسيطة	Simple interest
فائدة بالتزايد	Interest with increments
فائدة مركبة	Compound interest
فترة الأساس للرقم القياسى	Base weighting of index number
فترة التقدير	Interval estimation
فترة الثقة	Confidence interval
فرض بديل	Alternative hypothesis
فرض صفرى	Null hypothesis
فرق بين الأوساط	Difference between means
فرق بين النسب	Difference between proportions
فرق مشترك	Common difference
فضاء العينة	Sample space
فئات (مجموعات)	Sets
فئة المنوال	Modal class
فئة الوسيط	Median class

(ق)

قاعدة قرار بايز	Bayesian decision rule
قطع زائد قائم	Rectangular hyperbola
قواعد اتخاذ القرار	Decision rules
قوة الاختبار	Power of a test
قيمة حالية	Present value
قيمة متوقعة	Expected value

(ك)

كشف بالمعاينة	Discovery sampling

(م)

متجه	Vector
متجه عمودى	column vector
متغير	Variable
متغير تابع	Dependent variable
متغير خارجى	Exagenous variable
متغير عشوائى	Random variable
متغير كمى	Quantitative variable
متغير كيفى	Qualitative variable
متغير مستقل	Independent variable
متغير منفصل	Discrete variable
متوالية	Series
متوالية عددية	Arithmetic series
متوالية هندسية	Geometric series
متوسطات متحركة	Moving averages
مثلث باسكال	Pascal's triangle
مجتمع	Population
مجتمع محدود	Finite population
مجموعات (فئات)	Sets
محدد المصفوفة	Determinant of matrix
مخطط الشجرة	Tree diagram
مدبب	Lieptokurtic
مدرج تكرارى	Histogram
مدى	Range
مدى ربيعى	Interquartile range
مراجعة بالعينة	Sample auditing
مربعات صغرى	Least squares
مركبات السلاسل الزمنية	Components of a time series
مركز الفئة	Class mark
مرونة	Elasticity
مرونة السعر	Elasticity of price
مرونة الطلب	Elasticity of demand
مساحة المتباينة	Area of inequality

مساحة تحت منحنى دالة الكثافة	Area under probability density curves
مساحة تحت المنحنى الطبيعى	Area under the normal curve
مسائل تحقيق الحد الأدنى	Minimization problems
مسائل تحقيق الحد الأعلى	Maximization problems
مسائل الدفع المتساوى	Constant repayment problem
مستطيل (عمود)	Bar
مستوى المعنوية (الثقة)	Significance level
مشتقة	Derivative
مصادر للمعلومات الاحصائية	Sources of statistical informations
مصفوفات	Matrices
مصفوفة المدخل - والمخرج	Input-output matrix
مصفوفة الوحدة	Identity matrix
مضروبات	Factorials
مضلع التكرار المتجمع	Ogive
مضلع تكرارى	Frequency polygon
معادلات وأشكال بيانية	Equations and graphs
معادلات آنية	Simultaneous equations
معادلات خطية	Linear equations
معادلات الدرجة الثانية	Quadratic equations
معادلات عادية	Normal equations
معامل الارتباط	Correlation coefficient
معامل ارتباط الرتبة	Coefficient of rank correlation
معامل الالتواء	Coefficient of skewness
معامل بولى للالتواء	Bowley's coefficient of skewness
معامل بيرسون للالتواء	Pearson's coefficient of skewness
معامل التحديد	Coefficient of determination
معامل التغير	Coefficient of variation
معامل سبيرمان لارتباط الرتب	Spearman's coefficient of rank
معاملات تقنية	Technical coefficients
معاينة	Sampling
معاينة احتمالية	Probability sampling
معاينة حسب وحدة العملة	Monetary unit sampling
معاينة بالحصة	Quota sampling
معاينة طبقية	Stratified sampling

معاينة عشوائية	Random sampling
معاينة على مراحل	Multi-stage sampling
معاينة عنقودية	Cluster sampling
معاينة مقبولة	Acceptance sampling
معاينة منتظمة	Systematic sampling
معدل التغير	Rate of change
معدل الدخل للعائد	Internal rate of return
معلمة (وجمعها معالم)	Parameter
معلومات كاملة	Perfect informations
مفرطح	Platykurtic
مقابلة شخصية (مواجهة)	Interviewing
مقاييس التخصيص	Measures of location
مُقَدِر	Estimater
مقلوب المصفوفات	Inversion of matrices
معايير اتخاذ القرار	Criteria for decision making
معيار الحد الأدنى - الأعلى	Minimax criterion
معيار الحد الأعلى - الأدنى	Maximin criterion
معيار الحد الأعلى - الأعلى	Maximax criterion
مقياس الالتواء	Measure of skewness
مقياس التغير	Measure of variation
ملخص سنوى للاحصاء	Annual abstract of statistics
منافع اتخاذ القرار	Utilities in decision making
منحنى لورنز	Lorenz curve
منسوب السعر	Price relative
منسوب كمى	Quantity relative
منطقة حرجة	Critical region
منطقة الرفض	Rejection region
منطقة القبول	Acceptance region
منطقة متاحة (الجدوى)	Feasible region
منوال	Mode
ميل	Gradient

(ن)

نزعة مركزية	Central tendency

Ratio	نسبة
Common ratio	نسبة مشتركة
Percentage	نسبة مئوية
Quartile deviation	نصف المدى الربيعى
Baye's theorem	نظرية بايز
Central limit theorem	نظرية الحد المركزى
Index-linked saving scheme	نظم الادخار المرتبطة بالرقم القياسى
Point of inflexion	نقطة انقلاب
Turning point	نقطة دوران
Minimum turning point	نقطة الدوران الصغرى
Maximum turning point	نقطة الرجوع العظمى

(و)

Mean	وسط
Simple mean of relatives	وسط بسيط للمناسيب
Arithmetic mean	وسط حسابى
Assumed mean	وسط فرضى
Weighted mean of relative index	وسط مرجح للمناسيب
Median	وسيط
Base time	وقت قاعدى

المصطلحات العلمية (انجليزى - عربى)

(A)

Absolute	مطلق
Abuses of statistics	سوء استخدام الاحصاء
Acceptance sampling	معاينة مقبولة
Account	حساب
Accountant	محاسب
Accounting	محاسبة
Accumulation	تراكم
Action limit	حد انجاز الاجراء
Activity	نشاط
Addition	جمع
Addition of matrices	جمع المصفوفات
Addition of probabilities	جمع الاحتمالات
Agency	وكالة
Agent	وكيل
Aggregate	كلى ، شامل
Aggregation	تجميع
Agreement	اتفاق
Aid	اعانة ، مساعدة
Allocation	تخصيص
Alternative hypothesis	الفرض البديل
Annual abstract of statistics	الملخص السنوى للاحصاء
Annuities	الدفعات السنوية المتساوية
Area	مساحة
Area of inequality	مساحة المتباينة
Area under the normal curve	مساحة تحت المنحنى الطبيعى
Area under probability density curve	مساحة تحت منحنى دالة الكثافة
Arithmetic mean	وسط حسابى
Arithmetic series	متوالية عددية
Aspect	جانب من ، أو زاوية من

Assets	أصول
Assumed mean	وسط فرضى

(B)

Bar	مستطيل (عمود)
Bar chart	خريطة المستطيلات (الأعمدة)
Base time	وقت أساسى
Base wage	أجر أساسى
Base weighting of index numbers	الترجيح القاعدى للأرقام القياسية
Bayes' theorem	نظرية بايز
Bayesian decision rule	قاعدة قرار بايز
Bayesian probability	احتمال بايز
Behaviour	سلوك
Best fit	التوفيق الأفضل
Bias in surveys	التحيز فى المسوح
Binomial distribution	توزيع ذو الحدين
Bivariate normal distribution	التوزيع الطبيعى الثنائى
Boom	رواج
Bowley's coefficient of skewness	معامل بوليى للالتواء
Budget	ميزانية ، موازنة
Budgets	الموازنات
Business activity	نشاط تجارى
Business cycles	دورات الاقتصادى

(C)

Calculation	حساب ، تقدير
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Capital	رأس المال
Causality	السببية
Cause	سبب
Census	تعداد
Central limit theorem	نظرية الحد المركزى
Central tendency	النزعة المركزية
Chain based index numbers	سلسلة من الأرقام القياسية القاعدية
Change	تغير

Chi-squared test	اختبار كاى تربيع (كا٢)
Class boundary	حد الفئة
Class frequency	تكرار الفئة
Class length	طول الفئة
Class limits	حدود الفئة
Class mark	مركز الفئة
Classes	فئات
Classical probability	احتمال كلاسيكى (قياسى)
Cluster sampling	معاينة عنقودية
Coding method	طريقة التكويد (الشفرة)
Coefficient	معامل
Coefficient of alienation	معامل إبعاد
Coefficient of contingency	معامل المقارنة
Coefficient of correlation	معامل الارتباط
Coefficient of determination	معامل التحديد
Coefficient of rank correlation	معامل ارتباط الرتبة
Coefficient of skewness	معامل الالتواء
Coefficient of variation	معامل التغاير (الاختلاف)
Column vector	متجه عمودى
Combinations	توافيق
Combinations of normal distributions	توافيق لتوزيعات طبيعية
Common difference	فرق مشترك
Common ratio	نسبة مشتركة
Company	شركة
Competition	منافسة
Component bar chart	خريطة مستطيلات مفردة
Components of a time series	مركبات السلاسل الزمنية
Compound bar chart	خريطة مستطيلات مركبة
Compound interest	فائدة مركبة
Conditional probability	احتمال شرطى
Confidence interval	فترة الثقة
Consistence	تناسق ، اتساق
Constant	ثابت
Constant repayment problems	مسائل الدفع المتساوى

Consumer	مستهلك
consumption	استهلاك
Contingency table	جدول اقتران
Continuity correction	تصحيح مستمر
Continuous compounding	تركيب متصل
Continuous distribution	توزيع متصل
Control	رقابة ، مراقبة
Control chart	خريطة الضبط
Copartnership	مشاركة
Correlation	ارتباط
Correlation and independence	ارتباط واستقلال
Correction of errors	تصويب الأخطاء
Correlation ratio	نسبة الارتباط
Cost	تكلفة
Cost Accounting	محاسبة التكاليف
Cost function	دالة التكلفة
Criteria for decision making	معايير اتخاذ القرار
Critical region	منطقة حرجة
Cumulative frequency curve	المنحنى التكرارى المتجمع
Cumulative frequency distributions	التوزيعات التكرارية المتجمعة
Cumulative frequency table	جدول تكرار متجمع
Cumulative percentage frequency table	جدول تكرار نسبى متجمع
Cyclical variation	تغير دورى

(D)

Debt	دين
Decision making	اتخاذ القرار
Decision rules	قواعد اتخاذ القرار
Decision trees	شجرات القرار
Deflating	تكميش
Degree	درجة
Degrees of freedom	درجات الحرية
Demand	طلب
Dependence	تبعية

Dependent variable	متغير تابع
Depreciation	استهلاك ـ انتقاص
Depression	كساد
Derivative	مشتقة
Descriptive statistics	احصاءات وصفية
Deseasonalizing time series	سلاسل زمنية بعد استبعاد الأثر الموسمى
Determinant of matrix	محدد المصفوفة
Deviation	انحراف
Diagram	شكل بيانى
Difference	فرق
Difference between proportions	الفرق بين النسب
Differentiation	تفاضل
Discounting	الخصم
Discovery sampling	استكشاف بالعينة
Discrete distribution	توزيع منفصل
Discrete variable	متغير منفصل
Disparity	مفارقة
Dispersion of data	تشتت البيانات
Distributions of probability	توزيعات احتمالية
Division	تقسيم

(E)

Efficiency	فعالية
Elasticity of demand	مرونة الطلب
Electronic computers	الحاسبات الألكترونية
Employee	مستخدم
Employment	عمالة
Equations and graphs	معادلات وأشكال بيانية
Estimation	تقدير
Estimation sampling	تقدير المعاينة
Estimation of attributes	تقدير للصفات
Estimation of variables	تقدير للمتغيرات
Expected value	قيمة متوقعة
Expenses	مصاريف ، نفقات

Exponential function دالة أسية
External auditing المراجعة الخارجية
Extrapolation استكمال خارجى

(F)

Factorials مضاريب
Factorization method for quadratic equations التحليل إلى عوامل لمعادلات الدرجة الثانية
Family expenditure survey احصاء الانفاق العائلى
Feasible region منطقة الجدوى (المنطقة المتاحة)
Financial activity نشاط مالى
Financial statistics الاحصاء المالى
Finite population مجتمع محدود
First-order autocorrelation ارتباط ذاتى من الدرجة الأولى
Five-bar gate حزمة
Forecasting التنبؤ
Forecasting from a time series تنبؤ من السلاسل الزمنية
Frequency تكرار
Frequency polygon مضلع تكرارى
Frequency tables جداول تكرارية

(G)

Geometric mean الوسط الهندسى
Geometric series متوالية هندسية
Given time زمن معطى
Given time weighting of index numbers الأرقام القياسية المرجحة حسب الزمن المعطى
Goodness of fit جودة التوفيق
Goodness of fit test اختبار جودة التوفيق
Gradient ميل
Graphs اشكال بيانية
Grouped data بيانات مبوبة

(H)

Harmonic mean	الوسط التوافقى
Heteroscedasticity	اختلاف التباين
Histogram	المدرج التكرارى
Hypothesis testing	اختبار الفروض

(I)

Identification	تعرف (أو تحديد)
Independence and correlation	استقلال وترابط
Independent variable	متغير مستقل
Index-linked saving schemes	نظم الادخار المرتبطة بالرقم القياسى
Index numbers	أرقام قياسية
Index of retail prices	رقم قياسى لأسعار التجزئة
Inferential statistics	احصاء استقرائي
Input-output analysis	تحليل المدخلات ـ المخرجات
Input-output matrix	مصفوفة المدخلات ـ المخرجات
Intercept	الجزء المقطوع
Interest	فائدة
Internal rate of return	معدل العائد الداخلى
Interpolation	استكمال داخلى
Intersection of sets	تقاطع المجموعات (الفئات)
Interval estimation	فترة التقدير
Interviewer bias	انحياز القائم بالمقابلة
Interviewing	المقابلة الشخصية
Inversion of matrices	معكوس المصفوفات

(J)

Joint probability	احتمال مشترك
Judgment sampling	حكم بالمعاينة

(K)

Kurtosis	تفرطح

(L)

Lagged variable	متغير مبطأ
Laspeyres index number	رقم لاسبيرز القياسى
Least squares	المربعات الصغرى
Level of economic activity	مستوى النشاط الاقتصادى
Level of significance	مستوى المعنوية
Limitations of statistics	حدود الاحصاء
Line of best fit	خط التوفيق الأفضل
Line of equal distribution	خط التوزيع المتساوى
Linear equations	معادلات خطية
Linear programming	برمجة خطية
Linear regression	خط الانحدار
Link-based index numbers	الأرقام القياسية المرتبطة
Logarithmic function	الدالة اللوغاريتمية
Lorenz curve	منحنى لورنز

(M)

Marginal cost	تكلفة حدية (هامشية)
Marginal revenue	الدخل الهامشى
Matrices	مصفوفات
Maximax criterion	معيار الحد الأعلى ـ الأعلى
Maximin criterion	معيار الحد الأعلى ـ الأدنى
Maximization problems	مسائل تحقيق الحد الأعلى
Maximum turning point	نقطة الرجوع العظمى
Mean	وسط
Mean deviation	الانحراف المتوسط
Measure of skewness	مقياس الالتواء
Measure of variation	مقياس التغاير
Median	الوسيط
Median class	فئة الوسيط
Method of least squares	طريقة المربعات الصغرى
Method of moving averages	طريقة المتوسطات المتحركة
Minimax criterion	معيار تصغير النهاية العظمى (أدنى الأعلى)

Minimization problems مسائل تحقيق الحد الأدنى
Minimum turning point نقطة الدوران الصغرى
Modal class الفئة المنوالية
Mode منوال
Monetary unit sampling المعاينة حسب وحدة العملة
Moving averages المتوسطات المتحركة
Multiplication الضرب
Multiplication of matrices ضرب المصفوفات
Multiplication of probabilities ضرب الاحتمالات
Multi-stage sampling المعاينة على مراحل
Mutually exclusive events أحداث متنافية

(N)

Negative correlation ارتباط سلبى
Non-linear relationships علاقات غير خطية
Non-response عدم الاستجابة
Normal distribution توزيع طبيعى
Null hypothesis فرض صفرى

(O)

Objectives in decision making الأهداف عند اتخاذ القرارات
Ogive مضلع التكرار المتجمع
One-tailed test اختبار من طرف واحد
Operating characteristic curve منحنى توصيف العمليات
Opportunity loss ضياع الفرصة (فاقد الفرصة)
Order condition شرط الترتيب

(P)

Paashe index number رقم باشى القياسى
Parameter بارامتر
Pascal's triangle مثلث باسكال
Pay off table جدول العائد
Pearson's coefficient of skewness معامل بيرسون للالتواء
Percentage المئينات (نسبة مئوية)

Percentage component bar chart	خريطة الأعمدة للنسبة المئوية
Percentage compound bar chart	خريطة الأعمدة المتعددة للنسبة المئوية
Percentage frequency table	جدول تكرار النسبة المئوية
Permutations	تباديل
Personalistic (subjective) probability	احتمال شخصى ذاتى
Pictogram	رسم مصور
Pie chart	رسم دائرى
Point estimation	تقدير بنقطة
Point of inflexion	نقطة الانقلاب
Poisson distribution	توزيع بواسون
Population	المجتمع
Posterior probability	الاحتمال اللاحق
Power of a test	قوة الاختبار
Prediction	تنبؤ
Present value	قيمة حالية
Price index	رقم قياسى للسعر
Price relative	منسوب السعر
Prior probability	الاحتمال الترجيحى (المسبق)
Probability	الاحتمال
Probability density function	دالة الكثافة الاحتمالية
Probability distribution	توزيع احتمالى
Probability sampling	المعاينة الاحتمالية
Proportions tests	اختبار النسب

(Q)

Quadratic equations	معادلات الدرجة الثانية
Qualitative variable	متغير كيفى
Quality control chart	خريطة ضبط الجودة
Quantitative variable	متغير كمى
Quantity index	رقم قياسى كمى
Quantity relative	المنسوب الكمى
Quartile	ربيع
Quartile deviation	الانحراف الربيعى (نصف المدى الربيعى)
Questionnaire	استقصاء

Quota sampling	معاينة حصة نسبية

(R)

Random sampling	معاينة عشوائية
Range	مدى
Rank condition	شرط الرتب
Rank correlation	ارتباط الرتب
Rate of change	معدل التغير
Ratio	نسبة
Rectangular hyperbola	قطع زائد قائم
Reducing balance depreciation	استهلاك الأصول الثابتة بطريقة النسبة الثابتة
Regression	انحدار
Regression analysis	تحليل الانحدار
Rejection region	منطقة الرفض
Relative dispersion	تشتت نسبى
Relative frequency	تكرار نسبى
Relative variation	اختلاف نسبى
Residuals	بواقى
Retail prices index	رقم قياسى لأسعار التجزئة
Revenue function	دالة الايراد

(S)

Sample	عينة
Sample auditing	المراجعة بالعينة
Sample size	حجم العينة
Sample space	فضاء العينة
Sampling	معاينة
Sampling distribution of means	توزيع المعاينة للوسط
Sampling distribution of proportions	توزيع المعاينة للنسب
Sampling methods	طرق المعاينة
Scatter diagram	شكل الانتشار
Seasonal variation	تغير موسمى
Semi-log function	دالة نصف لوغاريتمية
Semi-log graph	رسم بيانى نصف لرغاريتمى

Serial correlation	ارتباط متسلسل
Series	متوالية
Set theory	نظرية المجموعات (الفئات)
Sets	مجموعات (فئات)
Significance level	مستوى المعنوية
Significance test	اختبار معنوى
Simple aggregative index number	الرقم القياسى التجميعى البسيط
Simple interest	فائدة بسيطة
Simple mean of relatives index	وسط بسيط للمناسيب
Simple random sampling	عينة عشوائية بسيطة
Simultaneous equations	معادلات آنية
Sinking fund	أرصدة الاحلال
Size of sample	حجم العينة
Skewness	التواء
Slop	ميل
Source of statistical information	مصادر للمعلومات الاحصائية
Spearman's coefficient of rank correlation	معامل سبيرمان لارتباط الرتب
Specification of Model	تحديد النموذج
Spurious accuracy	دقة زائفة
Standard deviation	انحراف معيارى
Standard error	خطأ معيارى
Statistic	احصائية
Statistics	علم الاحصاء
Stochastic	عشوائى
Straight line	خط مستقيم
Strategies in decision making	استراتيجيات اتخاذ القرار
Stratified sampling	معاينة طبقية
Student's t-distribution	توزيع - t لستيودنت
Systematic sampling	معاينة منتظمة

(T)

t-distribution	توزيع - t
Technical coefficients	المعاملات الفنية
Time series	السلاسل الزمنية

Time series analysis	تحليل السلاسل الزمنية
Time series graphs	الرسم البيانى للسلاسل الزمنية
Transposition of matrices	تدوير المصفوفات
Tree diagram	مخطط الشجرة
Trend	اتجاه
Turning point	نقطة دوران
Two-tailed test	اختبار من طرفين
Type I error	خطأ من النوع الأول
Type II error	خطأ من النوع الثانى
Types of error in hypothesis testing	أنواع الخطأ فى اختبارات الفروض
Typical time weighting of index numbers	الأرقام القياسية الترجيحية للسنة النموذجية
Typical year index	رقم قياسى للسنة النموذجية

(U)

Unbiased estimate	تقدير غير متحيز
Ungrouped data	بيانات غير مبوبة
Union of sets	اتحاد الفئات (المجموعات)
Unweighted index numbers	أرقام قياسية غير مرجحة
Utilities in decision making	الفوائد فى اتخاذ القرارات

(V)

Value index	رقم قياسى للقيم
Value weights	أوزان ترجيح للقيم
Variable	متغير
Variance	تباين
Variation, coefficient of	معامل الاختلاف
Vector	متجه
Venn diagram	شكل فن

(W)

Warning limit	حد الانذار
Weighted aggregative index	رقم القياس التجميعى المرجح
Weighted mean	وسط مرجح
Weighted mean of relatives index	وسط مرجح للمناسيب
Yates' continuity correction	تصحيح ييتس للاتصال

الفهرس الأبجدى

(ج)

(ح)

(خ)

(د)

(ر)

(ز)

(س)

(ش)

(ض)

(ط)

(ن)

رقم الايداع بدار الكتب

١٩٨٤ / ٧٣٣٨


مطابع الأهرام التجارية
القاهرة

07 084830 0

